

## 1 Hourglass

(a) Snelheid van een zandkorrel wanneer deze de bodem bereikt is  $v = \sqrt{2gh}$ . Op  $t = 0$  wordt het zand losgelaten. De benodigde valtijd is  $t_1 = \sqrt{2h/g}$ .

- $0 < t < t_1$

Voor  $t < 0$  gaf de weegschaal  $m + M g$  aan. Van  $t = 0$  tot  $t_1$ , komt er meer zand in de lucht en hierdoor zal de aflezing dalen.

$$\lambda = \frac{dm}{dt}$$

Typ hier uw vergelijking.

$$\lambda = \frac{dm}{dt} \implies m = \lambda t \tag{11}$$

$$\text{Gewicht } (W_1) = (M + m)g - \lambda t g \tag{12}$$

- $t_1 < t < t_2$ :

Hier is  $t_2 = m/\lambda$  het tijdstip waarop al het zand het bovenste reservoir heeft verlaten. Net na  $t = t_1$  zal de kracht op de weegschaal deels het gevolg zijn van het gewicht van het zand (zoals gegeven in de bovenstaande vergelijking) en deels van de stootkracht (impuls) van het vallende zand.

$$\text{Stootkracht} = v \frac{dm}{dt} = \lambda \sqrt{2gh}$$

$$\text{Gewicht } (W_2) = [(M + m)g - \lambda t_1 g] + \lambda \sqrt{2gh} = (M + m)g$$

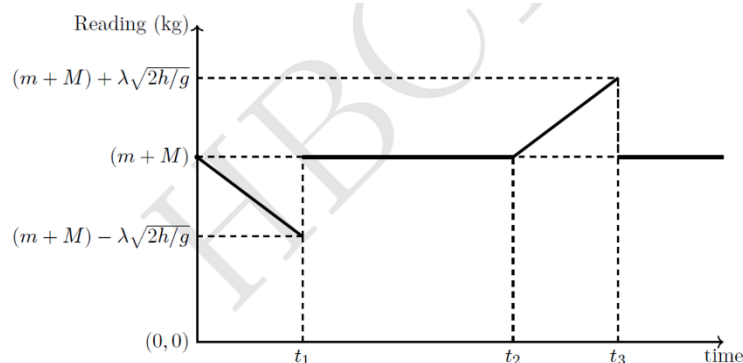
- $t_2 < t < t_3$ :

Hier is  $t_3 = m/\lambda + \sqrt{2h/g}$ . Dit is het tijdsbestek tussen het moment dat het zand het bovenste reservoir heeft verlaten en het moment dat al het zand de bodem van de zandloper heeft bereikt. Het gewicht is:

$$W_3 = W_2 + \lambda(t - t_2)g$$

- **Voor  $t > t_3$  is het gewicht:**

$$W_4 = (M + m)g$$



## 2 Foto-elektrisch effect voor zink

Gegeven:

- Intensiteit invallend licht:  $I_0 = 1,0 \mu\text{W}/\text{cm}^2 = 1,0 \times 10^{-6} \text{ W op } 1 \text{ cm}^2$
- Reflectie: 96%  $\rightarrow$  absorptie: 4%
- Van het geabsorbeerde licht is 3,0% boven de drempel (violet)

Beschikbare intensiteit voor het foto-elektrisch effect

$$I_{\text{abs}} = 0,04 I_0 = 0,04 \times 1,0 \times 10^{-6} = 4,0 \times 10^{-8} \text{ W}$$

$$I_{\text{violet}} = 0,03 I_{\text{abs}} = 0,03 \times 4,0 \times 10^{-8} = 1,2 \times 10^{-9} \text{ W}$$

(a) Aantal uitgezonden elektronen per seconde

Golflengte:  $\lambda = 250 \text{ nm} = 250 \times 10^{-9} \text{ m}$ , Fotonenergie:  $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$

met  $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ,  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$ :

$$E_\gamma \approx \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{250 \times 10^{-9}} \approx 7,9 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Aantal fotonen (en dus elektronen bij 100% efficiëntie) per seconde:

$$N = \frac{P}{E_\gamma} = \frac{1,2 \times 10^{-9}}{7,9 \times 10^{-19}} \approx 1,5 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$$

(b) Stroom in de fotobuis  $I = Ne$  met  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ :

$$I \approx 1,5 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^{-19} \approx 2,4 \times 10^{-10} \text{ A}$$

(c) Uittree-arbeid bij afsnijgolflengte 288 nm

$$\phi = \frac{hc}{\lambda_c} \approx \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{288 \times 10^{-9}} \approx 6,9 \times 10^{-19} \text{ J}$$

In eV:  $\phi_{\text{eV}} = \frac{6,9 \times 10^{-19}}{1,6 \times 10^{-19}} \approx 4,3 \text{ eV}$

(d) Remspanning voor licht met  $\lambda = 250 \text{ nm}$

Maximale kinetische energie:

$$K_{\text{max}} = E_\gamma - \phi \approx 7,9 \times 10^{-19} - 6,9 \times 10^{-19} \approx 1,0 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Remspanning:

$$eV_s = K_{\text{max}} \Rightarrow V_s = \frac{K_{\text{max}}}{e} \approx \frac{1,0 \times 10^{-19}}{1,6 \times 10^{-19}} \approx 0,6-0,7 \text{ V}$$

Antwoord:  $V_s \approx 0,66 \text{ V}$

### 3 Bollendak

- (a) De minimale dikte van de sneeuwlaag is te berekenen door het drukverschil tussen binnen en buiten de bol gelijk te stellen aan de druk van de sneeuwlaag. Het drukverschil tussen binnen en buiten is

$p_{binnen} - p_{buiten} = 1006.9 \cdot 10^2 - 1004.7 \cdot 10^2 = 2.2 \cdot 10^2 \text{ Pa}$ . Een sneeuwlaag van dikte  $d$  geeft een druk van

$$p_{sneeuw} = \rho_{sneeuw} g d = 200 \cdot 9.81 \cdot d. \quad (1)$$

Oplossen voor  $d$  geeft

$$d = \frac{p_{binnen} - p_{buiten}}{\rho_{sneeuw} g} = \frac{2.2 \cdot 10^2}{200 \cdot 9.81} \approx 0.11 \text{ m} = 11 \text{ cm}. \quad (2)$$

- (b) Evenals in vraag a moet het luchtdrukverschil tussen binnen en buiten de bol even groot zijn als de druk van de sneeuw op de bol. De sneeuwlaag geeft een druk van

$$p_{sneeuw} = \rho_{sneeuw} g d = 200 \cdot 9.81 \cdot 30 \cdot 10^{-2} = 588.6 \text{ Pa}. \quad (3)$$

Doordat de bol indeukt wordt het volume van de bol kleiner en dus druk in de bol hoger. Uit de ideale gaswet weten we dat het product van volume en druk constant is. Kortom we weten dat

$$(p_{buiten} + p_{sneeuw}) V_{eind} = p_{binnen} V_0 \quad (4)$$

$$V_{eind} = V_0 \frac{p_{binnen}}{p_{buiten} + p_{sneeuw}} \quad (5)$$

$$V_{eind} = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{p_{binnen}}{p_{buiten} + p_{sneeuw}} \quad (6)$$

$$V_{eind} = \frac{4}{24} \pi \cdot 7.2^3 \frac{1006.9 \cdot 10^2}{1004.7 \cdot 10^2 + 588.6} = 194.719 \dots \text{ m}^3. \quad (7)$$

Het volume van de bol moet dus kleiner worden met een volume

$$V_0 - V_{eind} = V_0 - V_0 \frac{p_{binnen}}{p_{buiten} + p_{sneeuw}} \quad (8)$$

$$= V_0 \left( 1 - \frac{p_{binnen}}{p_{buiten} + p_{sneeuw}} \right) \quad (9)$$

$$= V_0 \frac{p_{buiten} + p_{sneeuw} - p_{binnen}}{p_{buiten} + p_{sneeuw}} \quad (10)$$

$$= \frac{4}{24} \pi \cdot 7.2^3 \frac{1004.7 \cdot 10^2 + 588.6 - 1006.9 \cdot 10^2}{1004.7 \cdot 10^2 + 588.6} = 0.712 \dots \approx 0.71 \text{ m}^3. \quad (11)$$

Er zijn verschillende manieren om tot een redelijk schatting van de diepte van de kuiltjes te komen. Een mogelijkheid is de volgende: Wanneer een bol van straal  $r$  aan de bovenkant een kuiltje van diepte  $h$  krijgt dan wordt het volume van de bol kleiner met tweemaal een bolsegment van hoogte  $h$ . De inhoud van een bolsegment met hoogte  $h$  van een bol met straal  $r$  wordt gegeven door

$$V_{segment} = \int_0^h \pi (r^2 - (r-x)^2) dx \quad (12)$$

$$= \pi \int_0^h 2rx - x^2 dx \quad (13)$$

$$= \pi \left[ rx^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^h \quad (14)$$

$$= \pi \left( rh^2 - \frac{1}{3} h^3 \right) \quad (15)$$

$$= \pi h^2 \left( r - \frac{1}{3} h \right) \quad (16)$$

Een exacte oplossing geeft dus dat

$$V_0 \frac{p_{buiten} + p_{sneeuw} - p_{binnen}}{p_{buiten} + p_{sneeuw}} = 2\pi h^2 \left( r - \frac{1}{3} h \right) \quad (17)$$

$$0.712 \dots = 2\pi h^2 \left( 3.6 - \frac{1}{3} h \right) \quad (18)$$

## 2026 uitwerkingen derde ronde

Zoals je ziet is dit een derdemachtsvergelijking in  $h$ . Dus op zich valt deze best op te lossen (exact met de vergelijking van Cardano of numeriek). Hier komt een antwoord uit van  $h \approx 18\text{cm}$ . Maar dit hoef je niet te kunnen.

Om hier handmatig een redelijke schatting uit te halen veronderstellen we dat  $\frac{1}{3}h \ll r$ . Dit is redelijk aangezien  $V_0 - V_{\text{eind}} \ll V_0$ . We reduceren tot

$$V_0 \frac{p_{\text{buiten}} + p_{\text{sneeuw}} - p_{\text{binnen}}}{p_{\text{buiten}} + p_{\text{sneeuw}}} \approx 2\pi h^2 r \quad (19)$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{p_{\text{buiten}} + p_{\text{sneeuw}} - p_{\text{binnen}}}{p_{\text{buiten}} + p_{\text{sneeuw}}} \approx 2\pi h^2 r \quad (20)$$

$$\frac{2}{3}r^2 \frac{p_{\text{buiten}} + p_{\text{sneeuw}} - p_{\text{binnen}}}{p_{\text{buiten}} + p_{\text{sneeuw}}} \approx h^2 \quad (21)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}r^2 \frac{p_{\text{buiten}} + p_{\text{sneeuw}} - p_{\text{binnen}}}{p_{\text{buiten}} + p_{\text{sneeuw}}} \approx h \quad (22)$$

$$h \approx 0.1775 \dots \text{m} \approx 18\text{cm}. \quad (23)$$

Voor de gegevens voor deze opgave is gebruikgemaakt van de volgende bronnen (geraadpleegd 28-01-2026)  
<https://www.buitink-technology.com/nl/architectuur/etfe-luchtkussendaken/bollendak-stationsplein-utrecht>  
<https://www.bouwpututrecht.nl/2017/01/19/stationsplein-deel-1-bollendak/>  
<https://roof-connect.nl/artikelen/bollen-overkapping-utrecht-cs-deels-ingezakt>

NB. De echte bollen van het Bollendak zijn geen hele bollen. Het zijn twee bolsegmenten op elkaar. Dit verandert uiteraard de waarden van  $V_0$  en  $r$ . Om de wiskunde in deze opgave niet onnodig ingewikkeld te maken rekenen we hier alsof het hele bollen zijn. De relevante natuurkunde is ongewijzigd: verg. (17) blijft gelden. Hierin moet  $r$  worden gezien als de straal van de bolsegmenten en  $V_0$  als het volume van de bolsegmenten samen.

NB2. De bollen waren in het echt veel verder ingezakt. Dit komt onder andere omdat het folie gewicht heeft en in het bouwerk naast de bollen ook een heel gansenstelsel zit waardoor het volume  $V_0$  in feite veel groter is.

**NB#.** Meer inzakken want compressor houdt het drukverschil constant en er zullen luchtmoleculen ontsnappen.

#### 4 Speerwerpen

- (a) De beginsnelheid van het projectiel t.o.v. de grond is:

$$\text{horizontaal: } v_x = v + u \cos \theta$$

$$\text{verticaal: } v_y = u \sin \theta$$

$$\text{Tijd in de lucht: } T = \frac{2u \sin \theta}{g}$$

$$\text{Bereik: } R = v_x \cdot T$$

Dus:

$$R = \frac{2u \sin \theta}{g} (v + u \cos \theta)$$

- (b) Hoek  $\theta_{\max}$  voor maximaal bereik

We maximaliseren:

$$R(\theta) = \frac{2u}{g} (v \sin \theta + u \sin \theta \cos \theta)$$

Neem de afgeleide:

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{2u}{g} (v \cos \theta + u(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) = 0$$

$$\text{Gebruik: } \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$\text{Dan: } v \cos \theta + u \cos 2\theta = 0 \rightarrow u \cos 2\theta = -v \cos \theta$$

$$\text{Gebruik: } \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\text{Invullen: } u(2 \cos^2 \theta - 1) = -v \cos \theta$$

$$\text{Herschrijven: } 2u \cos^2 \theta + v \cos \theta - u = 0$$

Dit is een kwadratische vergelijking in  $x = \cos \theta$ :

$$2ux^2 + vx - u = 0$$

Oplossing:

$$x = \cos \theta = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 8u^2}}{4u}$$

Dus:

$$\theta_{\max} = \arccos \left( \frac{-v + \sqrt{v^2 + 8u^2}}{4u} \right)$$

Is  $\theta_{\max}$  kleiner of groter dan  $45^\circ$ ?

Omdat het voertuig naar voren beweegt, is extra horizontale snelheid al aanwezig.

Daarom hoeft de werper minder horizontale component toe te voegen. Dus:  $\theta_{\max} > 45^\circ$

#### 5 Relatieve snelheid

- (a) De snelheid van het deeltje dat beweegt in stelsel  $K_2$  met snelheid  $v_2$  in het stelsel  $K_1$  wordt gegeven door een standaardformule:

$$v_1 = \frac{v_2 + v}{1 + v_2 v / c^2}$$

Door  $\beta_i = v_i / c$  te introduceren, kunnen we deze formule herschrijven in de vorm:

$$\beta_1 = \frac{\beta_2 + \beta}{1 + \beta_2 \beta}$$

Nu kan diezelfde formule worden opgeschreven voor een transformatie van  $K_1$  naar... $K_0$

$$\beta_0 = \frac{\beta_1 + \beta}{1 + \beta_1\beta}$$

Wanneer we nu (S.2.6.1) invullen in (S.2.6.2), verkrijgen we:

$$\beta_0 = \frac{\beta_2 + 2\beta/(1 + \beta^2)}{1 + 2\beta_2\beta/(1 + \beta^2)}$$

- (b) Als we een transformatie moeten uitvoeren voor  $n$  stelsels, is het lastig om een formule te verkrijgen met de aanpak uit (a). In plaats daarvan gebruiken we het concept van rapiditeit,  $\psi$ . Inderdaad, voor één stelsel hadden we in (S.2.6.1):

$$\beta_1 = \frac{\beta_2 + \beta}{1 + \beta_2\beta}$$

wat exact de formule is voor de tanh van een som van argumenten:

$$\tanh(\psi_1 + \psi_2) = \frac{\tanh \psi_1 + \tanh \psi_2}{1 + \tanh \psi_1 \tanh \psi_2}$$

waarbij  $\tanh \psi_i = \beta_i$ . Dit betekent dat opeenvolgende Lorentz-transformaties gelijkstaan aan het optellen van rapiditeiten. Dus de snelheid in het stelsel  $K_0$  na  $n$  transformaties ( $\text{als } v_{n+1} = v$ ) wordt gegeven door:

$$\beta_0 = \tanh \psi = \tanh \sum_i \psi_i = \tanh[(n + 1) \tanh^{-1} \beta]$$

We kunnen controleren dat als  $n \rightarrow \infty$ , dan  $\beta_0 \rightarrow 1$ .

## 6 Geladen bol

Elektrisch veld van een cirkelvormige schijf met ladingsdichtheid  $\sigma$  en straal  $r$  op een willekeurig punt  $z$  op zijn as voor  $z \ll r$ :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

Het gegeven systeem kan worden beschouwd als een bolschil met straal  $R$  en ladingsdichtheid  $\sigma$  en een schijf met straal  $r$  en ladingsdichtheid  $-\sigma$ .

$\vec{E}(R + \delta)$  = Elektrisch veld ten gevolge van de schil + Elektrisch veld ten gevolge van het gat

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0(R + \delta)^2} \hat{z} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \\ &\approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \end{aligned}$$

Op vergelijkbare wijze:

$$\vec{E}(R - \delta) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} \text{ Voor } R \gg r:$$

$$\vec{E}(R + \delta) = \vec{E}(R - \delta) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \hat{z} \text{ dat wil zeggen radiaal naar buiten gericht.}$$

**7 De artillerist verbaast zich**

(a) Aangezien de weerkaatsing tegen de muur elastisch is, herhaalt de bal de beweging van zijn spiegelbeeld, alsof hij zijn beweging voortzet in de weerspiegelde ruimte achter de muur. Het raken van het startpunt komt dus neer op het raken van het punt op dezelfde hoogte en op een afstand van  $2L$  vanaf het startpunt.

(a) De afstand van de worp wordt gegeven door de formule:

$$2L = V_x t = V_x \cdot \frac{2V_y}{g} = \frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V^2}{g} \sin 2\alpha \quad (1^*)$$

Omdat in beide gevallen de schietafstand tot de muur gelijk is:

$$\sin 2\alpha_1 = \sin 2(\alpha_1 + \Delta\alpha). \quad (2^*)$$

Vanuit 2 krijgen we de hoek:

$$\alpha_1 = 45^\circ - \frac{\Delta\alpha}{2}. \quad (3^*)$$

(b) Met 1 en 3 krijgen we:  $L = \frac{V^2}{g} \cos \Delta\alpha. \quad (4^*)$

(c) De bal moet bij beide schoten de muur raken en mag er niet overheen vliegen. De muur staat op  $x = L$ , wat exact het hoogste punt (de top) van de parabool is. De hoogte waarop de bal de muur raakt, is dus de maximale hoogte  $y_{max}$  van de respectievelijke baan.

De formule voor de maximale hoogte is:

$$y_{max} = \frac{V^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

Omdat de tweede hoek  $\alpha_2$  groter is dan de eerste hoek  $\alpha_1$ , zal het tweede schot de muur op een hoger punt raken dan het eerste schot. De minimale hoogte van de muur  $H$  moet dus gelijk zijn aan de maximale hoogte van het tweede schot  $y_{max,2}$ :

$$H = \frac{V^2 \sin^2\left(45^\circ + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{2g}$$

Met behulp van de goniometrische identiteit  $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$  schrijven we dit om:

$$2\theta = 2\left(45^\circ + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) = 90^\circ + \Delta\alpha$$

$$\cos(90^\circ + \Delta\alpha) = -\sin(\Delta\alpha)$$

$$\left(\sin^2\left(45^\circ + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)\right) = \frac{1 - (-\sin(\Delta\alpha))}{2} = \frac{1 + \sin(\Delta\alpha)}{2}$$

Dit invullen geeft de minimale hoogte van de muur:

$$H = \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{1 + \sin(\Delta\alpha)}{2} = \frac{V^2}{4g} (1 + \sin(\Delta\alpha))$$

## 8 Ionosferische reflectie

- (a) Wanneer twee coherente golven (golven met dezelfde frequentie en een constant faseverschil tegelijkertijd bij een ontvanger aankomen, ontstaat er **interferentie**. Het signaal dat via de ionosfeer reist (het ruimtesignaal), legt een langere weg af die afhankelijk is van de hoogte van de ionosfeerlaag. Omdat de ionosfeerlaag continu verticaal beweegt, verandert de totale weglengte van het ruimtesignaal voortdurend. Hierdoor verandert het **faseverschil** tussen de twee signalen bij de ontvanger in de loop van de tijd. Wanneer de signalen in fase zijn, versterken ze elkaar, wanneer ze in tegenfase zijn, verzwakken ze elkaar. Dit uit zich in een fluctuerende signaalintensiteit.
- (b) Om de fluctuatie kwantitatief te schatten, berekenen we de zwevingsfrequentie  $f_{\text{zweving}}$ , oftewel hoe vaak per seconde het signaal wisselt tussen maximaal en minimaal. De frequentie van het radiosignaal is  $f = 10 \text{ MHz} = 10^7 \text{ Hz}$ . Met de lichtsnelheid  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  is de golflengte  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{10^7} = 30 \text{ m}$$

De afstand tussen zender en ontvanger bedraagt  $D = 600 \text{ km}$ . De ionosfeer bevindt zich op een hoogte  $h = 250 \text{ km}$ . Omdat de aarde vlak verondersteld mag worden en de laag horizontaal reflecteert, vormt het pad van het ruimtesignaal een gelijkbenige driehoek. De lengte van één helft van dit pad (van zender naar ionosfeer) volgt uit de stelling van Pythagoras:

$$s = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + h^2}$$

De totale weglengte van het ruimtesignaal  $L_2$  is tweemaal deze afstand:

$$L_2 = 2 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + h^2}$$

De ionosfeer beweegt verticaal met een snelheid  $v_h = \frac{dh}{dt} = 3 \text{ m/s}$ . We bepalen hoe snel de totale weglengte  $L_2$  verandert ten opzichte van de tijd door de kettingregel toe te passen

$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dt} &= \frac{dL_2}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \\ \frac{dL_2}{dt} &= 2 \cdot \frac{1}{2 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + h^2}} \cdot 2h \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{2h}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + h^2}} \cdot v_h \end{aligned}$$

Laten we de gegeven waarden in kilometers invullen voor de fractie (de eenheden vallen hierin tegen elkaar weg):

$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dt} &= \frac{2 \cdot 250}{\sqrt{300^2 + 250^2}} \cdot 3 = \frac{500}{\sqrt{90000 + 62500}} \cdot 3 = \frac{500}{\sqrt{152500}} \cdot 3 \frac{dL_2}{dt} \approx \frac{500}{390,51} \cdot 3 \\ &\approx 1,2804 \cdot 3 \approx 3,8411 \text{ m/s} \end{aligned}$$

De weglengte van het gereflecteerde signaal verandert dus met een snelheid van ongeveer 3,84 m/s.

Elke keer dat de weglengte met exact één golflengte  $\lambda = 30$  m verandert, doorloopt het interferentiepatroon één volledige cyclus (van maximaal naar minimaal en weer terug naar maximaal).

De fluctuatiefrequentie (zwevingsfrequentie) is:

$$f_{\text{zweving}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{dL_2}{dt} = \frac{3,8411 \text{ /s}}{30} \approx 0,1280 \text{ Hz}$$

De periode  $T$  van één volledige intensiteitswisseling is het omgekeerde van deze frequentie:

$$T = \frac{1}{f_{\text{zweving}}} \approx 7,81 \text{ s}$$

## 9 Pulsar

- (a) Voor een deeltje met massa  $m$  op het oppervlak van de pulsar met massa  $M_p$  en straal  $r$ , is de voorwaarde om aan de pulsar verbonden te blijven:

$$\begin{aligned} mr\omega^2 &\leq \frac{GM_p m}{r^2} \\ \omega^2 &\leq \frac{GM_p}{r^3} = \frac{4\pi G \rho_p}{3} \\ \therefore \rho_p &\geq \frac{3\omega^2}{4\pi G} = \frac{3\pi}{GT^2} \rho_p \geq 6,28 \times 10^{16} \text{ kg m}^{-3} \end{aligned}$$

- (b)

$$\rho_p = \frac{3M_p}{4\pi r^3} r \leq 22,5 \text{ km}$$

- (c) Volgens het criterium van de middelpuntvliedende kracht centrifugaalkracht

$$\begin{aligned} \omega^2 &\leq \frac{4\pi G \rho}{3} \\ \omega &\leq 5,29 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1} \end{aligned}$$

Dus  $t \geq \frac{2\pi}{\omega} = 13,8$  dagen

Dus we kunnen stellen dat de rotatieperiode van de ster trager is dan 14 dagen.

- (d) We nemen aan dat tijdens het ineenstorten (de implosie) van de binnenste lagen de magnetische flux behouden blijft. Hierdoor zal de waarde van het magnetisch veld toenemen in de verhouding van de oppervlakken vóór en na het ineenstorten.

$$\frac{B_{\text{st}}}{B_p} = \frac{r_p^2}{r_{\text{st}}^2}$$

Nu is

$$r_{\text{st}} = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho_{\text{st}}}} = \sqrt[3]{\frac{30M_p}{4\pi\rho_{\text{st}}}}$$

Dus  $r = 4,15 \times 10^{10} \text{ m} = 59,3R_{\odot}$

En  $B_p = B_{\text{st}} \times \frac{r_{\text{st}}^2}{r_p^2}$

$$B_p = 3,40 \times 10^{11} \text{ T}$$

Het magnetisch veld aan het oppervlak van een pulsar is van de orde van  $10^8$  tot  $10^{10}$  T.



**10 Stok en veer (phys teach 63-1 2025)**

(a) Voor het traagheidsmoment gebruiken we de regel van Steiner:

$$I_x = I_{CM} + mx^2 = \frac{ml^2}{12} + mx^2$$

(b) Voor het krachtmoment geldt:

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = (I_{cm} + mx^2)\ddot{\theta} = \left(\frac{ml^2}{12} + mx^2\right)\ddot{\theta}$$

En

$$\tau = -k \left( \left(x + \frac{l}{2}\right) \sin \theta \right) \left(x + \frac{l}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

(c) Samenvoegen:

$$-k \left(x + \frac{l}{2}\right)^2 \sin \theta \cos \theta = \left(\frac{ml^2}{12} + mx^2\right)\ddot{\theta}$$

Dat geeft

$$\ddot{\theta} + \frac{k \left(x + \frac{l}{2}\right)^2}{m \frac{l^2}{12} + x^2} \sin \theta \cos \theta = 0$$

Met  $\sin \theta \approx \theta$  en  $\cos \theta \approx 1$  wordt dat

$$\ddot{\theta} + \frac{k \left(x + \frac{l}{2}\right)^2}{m \frac{l^2}{12} + x^2} \theta = 0$$

Wat lijkt op

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

met

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{x + l/2}{\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{12}}}}$$

En  $T = 2\pi / \omega$ 

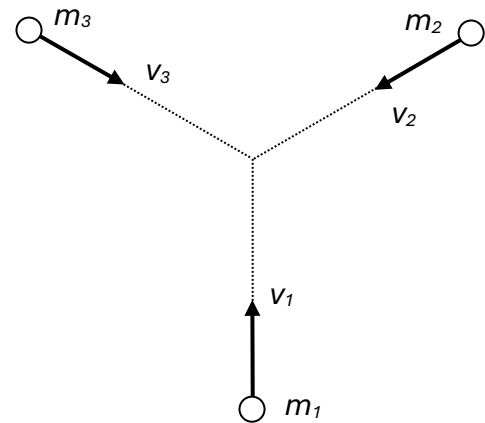
Dus

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k} \frac{\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{12}}}{x + l/2}}$$

## 11 Waterstof

(a) Neem het CM. Twee op elkaar vliegende H atomen hebben een totale impuls gelijk aan nul. De totale energie  $E_k$  is ook sterk positief. Na de botsing zou de impuls dus ook nul moeten zijn van het  $H_2$  molecuul, en dus ook de  $E_k$ . Maar er komen tenminste twee vormen van energie vrij. De  $E_k$  en  $E_{binding}$ . Waar deze energie moet blijven is onduidelijk!

(b) Zie het plaatje hiernaast. Voor de botsing geldt:  $\sum p = 0$ , in zowel de  $x$ - als  $y$ -richting. Verder geldt dat alle snelheden dezelfde grootte hebben (1 km/s) alsook de massa even groot.



De kinetische energie van de atomen samen is dus gemakkelijk te berekenen:  $2,5 \cdot 10^{-21}$  J.

(a) The decrease in potential energy ( $-\Delta < 0$ ) means that the kinetic energy increases. In the center of mass frame of two hydrogen atoms, the net momentum is necessarily zero and after the atoms combine and have a common velocity, that velocity must have zero magnitude, a situation precluded (uitsluiten) by the necessarily positive kinetic energy.

(b) The initial momentum is zero before the collision, and must be zero after the collision. Denote the common initial speed as  $v_0$ , the final speed of the hydrogen atom as  $v$ , the final speed of the hydrogen molecule as  $V$ , the common mass of the hydrogen atoms as  $m$  and the mass of the hydrogen molecules as  $2m$ . After the collision, the two particles must be moving in opposite directions, and so to conserve momentum,  $v = 2V$ . From conservation of energy,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2m)V^2 - \Delta + \frac{1}{2}mv^2 &= 3\frac{1}{2}mv_0^2 \\ mV^2 - \Delta + 2mV^2 &= \frac{3}{2}mv_0^2 \\ V^2 &= \frac{v_0^2}{2} + \frac{\Delta}{3m} \end{aligned}$$

from which  $V = 1.203 \times 10^4$  m/s, or  $1.20 \times 10^4$  m/s to two figures and the hydrogen atom speed is  $v = 2.41 \times 10^4$  m/s.

**12 Antwoord**

(a) De doorsnede van een draad is

$$A = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi(0,0010)^2 = 3,14 \times 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Weerstand van één draad:

$$R = \rho \frac{L}{A} = 1,1 \times 10^{-7} \frac{2,0}{3,14 \times 10^{-6}} = 0,070 \Omega.$$

De batterijen zijn zo aangesloten dat ze een gesloten kring vormen met beide draden in serie. De totale spanning is

$$U_{\text{tot}} = 5,0 + 5,0 = 10,0 \text{ V}.$$

Totale weerstand:

$$R_{\text{tot}} = 2R = 0,140 \Omega$$

Dus

$$I = \frac{U_{\text{tot}}}{R_{\text{tot}}} = \frac{10,0}{0,140} = 71,4 \text{ A}$$

(b) Voor een lange rechte draad:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

In het midden geldt

$$r = \frac{d}{2} = 0,050 \text{ m}.$$

Elke draad levert

$$B_1 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 71,4}{2\pi \cdot 0,050} = 2,86 \times 10^{-4} \text{ T}.$$

De stromen lopen tegengesteld. Tussen de draden wijzen de magnetische velden dezelfde kant op, dus ze tellen op:

$$B = 2B_1 = 5,71 \times 10^{-4} \text{ T}.$$

(c) De stroomkring van de linker batterij loopt via bovenste draad:  $L/2 + x$  en de onderste draad:  $L/2 + x$ 

Dus totale draadlengte:

$$L + 2x.$$

De weerstand van deze kring is

$$R_1 = \rho \frac{L + 2x}{A}.$$

Daarom

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{UA}{\rho(L + 2x)}.$$

Stroom geleverd door de rechter batterij, de kringlengte is

$$L - 2x,$$

dus

$$I_2 = \frac{UA}{\rho(L - 2x)}.$$

De twee stromen lopen door het staafje in tegengestelde richting. De netto stroom door het staafje is daarom

$$I = I_2 - I_1.$$

Invullen geeft

$$I = \frac{UA}{\rho} \left( \frac{1}{L-2x} - \frac{1}{L+2x} \right).$$

Samenvoegen:

$$I = \frac{UA(L+2x) - (L-2x)}{\rho(L-2x)(L+2x)} = \frac{UA}{\rho} \frac{4x}{L^2 - 4x^2}.$$

Dus exact:

$$I = \frac{4UA}{\rho} \frac{x}{L^2 - 4x^2}$$

Voor kleine uitslagen ( $x \ll L$ ) geldt

$$L^2 - 4x^2 \approx L^2,$$

zodat

$$I \approx \frac{4UA}{\rho L^2} x.$$

Dat is precies de lineaire benadering die harmonische beweging oplevert.

Invullen van de getallen:

$$\begin{aligned} \frac{4UA}{\rho L^2} &= \frac{4 \cdot 5.0 \cdot \pi (0.001)^2}{1.1 \times 10^{-7} \cdot (2.0)^2} \\ &= \frac{6.283 \times 10^{-5}}{4.4 \times 10^{-7}} \approx 1.43 \times 10^2. \end{aligned}$$

(d) Het staafje bevindt zich in het vrijwel homogene veld

$$B = 5,71 \times 10^{-4} \text{ T.}$$

De Lorentzkracht op een stroomvoerende geleider:

$$F = I_s d B.$$

Invullen van  $I_s = 143x$ :

$$F = (143x)(0,10)(5,71 \times 10^{-4}) = 8,17 \times 10^{-3} x.$$

De richting is naar het midden, dus

$$F = -kx.$$

Daaruit volgt

$$k = 8,17 \times 10^{-3} \text{ N/m.}$$

Voor een harmonische oscillator:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Dus

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,050}{8,17 \times 10^{-3}}} = 15,5 \text{ s.}$$

**B Condensatoren**

Vanwege de symmetrie is de spanning over de centrale condensator altijd nul. Deze zal dus NIET worden opgeladen en dus bij een steady state er ook uitgehaald kunnen worden. Wat dan overblijft is een parallel schakeling van twee takken waarin twee condensatoren in serie staan.