

Algemene instructies: Theoretische toets (30 punten)

Het niet voldoen aan een van de volgende voorwaarden kan leiden tot diskwalificatie

21 juli 2025

De theorie toets duurt 5 uur en is in totaal 30 punten waard. Succes van Ad en Enno.

Het begin en het einde van de toets worden aangegeven door een aankondiging, evenals elk uur de verstreken tijd, en dertig, vijftien en vijf minuten voor het einde van de toets.

Maak de enveloppen pas open als je de instructie krijgt om dit te doen.

De volgende voorwerpen zijn voorzien voor gebruik op de tafel: (1) een balpen, (2) een vulpotlood, (3) een gum, (4) een liniaal met schaalverdeling, (5) een passer en (6) een wetenschappelijke rekenmachine.

Tijdens de toets

- Gebruik de meegeleverde balpen. Als je het vulpotlood gebruikt om je aantekeningen, figuren, tabellen en grafieken te maken, vergeet dan nooit om de contouren van de uiteindelijke versie over te trekken met de balpen.
- Gebruik de speciale bladen met het label **A** voor je definitieve antwoorden. Vul de juiste rubrieken in met je antwoorden en de nodige observaties. Teken grafieken als dat nodig is. Streep alles door wat je niet nagekeken wilt hebben.
- Er zijn blanco werkbladen met het label **W** voor uitwerking. Gebruik de daarvoor bestemde bladen. Streep onnodige antwoorden en ruw werk dat niet beoordeeld hoeft te worden door. Gebruik alleen de voorkant van elk vel en houd de marge buiten de rand schoon.
- Extra werkbladen met het label **Z** zijn beschikbaar op aanvraag. Steek de "Help"-vlag omhoog en laat het de surveillant weten.
- Houd je antwoorden beknopt en leesbaar. Gebruik vergelijkingen, logische operatoren, symbolen en schetsen om je gedachten het beste over te brengen. Vermijd langdradigheid en veel woorden, omdat de markers mogelijk niet meertalig zijn.
- Kwantificering van de onzekerheid is niet vereist, tenzij anders aangegeven.
- Verlaat je werkplek niet zonder toestemming. Als je een toiletpauze nodig hebt of andere hulp, steek dan de vlag(gen) "Toilet", "Water" of "Help" omhoog.

Aan het einde van de toets

- Stop onmiddellijk met schrijven als het einde van de toets wordt aangekondigd.
- Stop alle bladen in de envelop met venster. Rangschik ze met de bedrukte zijde naar boven in de volgende volgorde: voorblad bovenaan, algemene instructies, vragenbladen (**Q**), antwoordbladen (**A**), werkbladen (**W**) en eventuele extra werkbladen (**Z**). Rangschik ze volgens hun paginanummer. Controleer of je ID, naam en stoelnummer op het schutblad zichtbaar zijn door het venster.
- Je surveillant laat weten wanneer je kunt vertrekken. Je mag de overige spullen meenemen, bijvoorbeeld de balpen, het vulpotlood, de liniaal, de gum, de passer, de wetenschappelijke rekenmachine, de waterfles en snacks.

Specifieke instructies

Verwijs tijdens de toets altijd naar de grootheden die in de instructies worden aangegeven, tenzij anders vermeld. In alle gevallen moeten de eenheden van alle gebruikte grootheden worden vermeld.

Natuurconstanten

Constance	Notatie	Waarde	Eenheid
Lichtsnelheid in vacuüm	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constance van Planck	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Gereduceerde constance van Planck	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,818 \times 10^{-34}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Constance van Boltzman	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Getal van Avogadro	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Molaire gasconstante	R	$8.314\,462\,618\,153\,24$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Elementaire lading	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{A} \cdot \text{s}$
Gravitatieconstante	G	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Standaardversnelling van de zwaartekracht	g	$9.806\,65$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Constance van Stefan-Boltzman	σ	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}$	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Permeabiliteit in vacuüm (magnetische constance)	μ_0	$1.256\,637\,061\,27(20) \times 10^{-6}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Permittiviteit in vacuüm (elektrische constance)	ϵ_0	$8.854\,187\,818\,8(14) \times 10^{-12}$	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Rydbergconstante	R_∞	$1.097\,373\,156\,815\,7(12) \times 10^7$	m^{-1}
Rustmassa van een elektron	m_e	$9.109\,383\,713\,9(28) \times 10^{-31}$	kg
Rustmassa van een proton	m_p	$1.672\,621\,925\,95(52) \times 10^{-27}$	kg
Rustmassa van een neutron	m_n	$1.674\,927\,500\,56(85) \times 10^{-27}$	kg
Atomaire massa eenheid	m_u	$1.660\,539\,068\,92(52) \times 10^{-27}$	kg
Electronvolt	eV	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Waterstof en sterrenstelsels (10 punten)

Dit probleem is gericht op het bestuderen van de bijzondere fysica van sterrenstelsels, zoals hun dynamica en structuur. In het bijzonder leggen we uit hoe we de massaverdeling van ons sterrenstelsel van binnenuit kunnen meten. Hiervoor richten we ons op waterstof, het hoofdbestanddeel.

In dit probleem gebruiken we alleen $\hbar$, gedefinieerd als $\hbar = h/2\pi$.

Deel A - Inleiding

Bohr-model

We veronderstellen dat het waterstofatoom bestaat uit een niet-relativistisch elektron, met massa m_e , dat rond een vast proton draait. In dit deel veronderstellen we dat de baanbeweging van het elektron cirkelvormig is.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.1 | Bepaal de snelheid van het elektron v in een cirkelbaan met straal r . | 0.2pt |
|------------|--|-------|

In het Bohr-model nemen we aan dat de grootte van het impulsmoment L van het elektron gekwantificeerd is, $L = n\hbar$ waarbij $n > 0$ een geheel getal is. We definiëren $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}$.

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.2 | Laat zien dat de straal van elke cirkelbaan wordt gegeven door $r_n = n^2 r_1$, waarbij r_1 de Bohrstraal is. Druk r_1 uit in termen van α , m_e , c en $\hbar$ en bereken de numerieke waarde (tot 3 significante cijfers). Druk v_1 , de snelheid in de baan met straal r_1 , uit in termen van α en c . | 0.5pt |
|------------|---|-------|

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.3 | Bepaal de mechanische energie van het elektron E_n op een cirkelbaan met straal r_n in termen van e , ϵ_0 , r_1 en n . Bepaal E_1 in de grondtoestand in termen van α , m_e en c . Bereken de numerieke waarde in eV. | 0.5pt |
|------------|---|-------|

Waterstof: fijne en hyperfijne structuren

De zeldzame spontane omkering van de spin van het elektron zorgt ervoor dat er gemiddeld eens per 10 miljoen jaar een foton per waterstofatoom wordt uitgezonden. Deze emissie dient als een waterstof-tracer in het heelal en is dus fundamenteel in de astrofysica. We zullen de overgang die verantwoordelijk is voor deze emissie in twee stappen bestuderen.

Eerst kijken we naar de interactie tussen de elektronspin en de relatieve beweging van het elektron en het proton. Vanuit het referentiekader van het elektron draait het proton om het elektron op een afstand r_1 . Dit veroorzaakt een magnetisch veld $\vec{B}_1$.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.4 | Bepaal de grootte B_1 van $\vec{B}_1$ op de positie van het elektron in termen van μ_0 , e , α , c en r_1 . | 0.5pt |
|------------|--|-------|

Ten tweede creëert de spin van het elektron een magnetisch moment $\vec{\mathcal{M}}_s$. De grootte hiervan is ongeveer $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$. De *fijne* (F) structuur is gerelateerd aan het energieverval ΔE_F tussen een elektron met een magnetisch moment $\vec{\mathcal{M}}_s$ parallel aan en dat van een elektron met $\vec{\mathcal{M}}_s$ (en antiparallel aan $\vec{B}_1$). Op dezelfde manier is de *hyperfijne* (HF) structuur gerelateerd aan het energieverval ΔE_{HF} , als gevolg van de interactie tussen parallelle en antiparallelle magnetische momenten van het elektron en het proton. Het is bekend dat deze ongeveer $\Delta E_{HF} \approx 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$ is, waarbij m_p de massa van het proton is.

- A.5** Druk ΔE_F uit als functie van α en E_1 . 0.5pt
 Leid een uitdrukking af voor de golflengte λ_{HF} van een foton dat wordt uitgezonden tijdens een overgang tussen de twee toestanden van de hyperfijnstructuur en geef de numerieke waarde in twee significante cijfers.

Deel B - Rotatiecurves van melkwegstelsels

Gegeven

- Kiloparsec: $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$
- Zonnemassa : $1 M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

We beschouwen een bolvormig sterrenstelsel gecentreerd rond een vast punt O . Op elk punt P is $\rho = \rho(P)$ de volumetrische massadichtheid en $\varphi = \varphi(P)$ de bijbehorende zwaartekrachtspotentiaal (dit is de gravitationele potentiële energie per massa-eenheid). Zowel ρ als φ hangen alleen af van $r = \|\vec{OP}\|$. De beweging van een massa m gelegen op P , als gevolg van het veld φ , is beperkt tot een vlak dat O bevat.

- B.1** Bepaal in het geval van een cirkelbaan de snelheid v_c , van een object dat in een cirkelvormige baan door P gaat, in termen van r en $\frac{d\varphi}{dr}$. 0.2pt

Fig. 1(A) is een afbeelding van het spiraalstelsel NGC 6946 in de zichtbare deel van het spectrum (van de 0.8m Schulman Telescope in het Mount Lemmon Sky Center in Arizona). De data in Fig. 1(B) tonen experimentele metingen van v_c voor dit sterrenstelsel. De centrale regio ($r < 1 \text{ kpc}$) wordt de bulge genoemd. In dit gebied is de massaverdeling ruwweg homogeen. De rode curve is een voorspelling voor v_c als het stelsel homogeen zou zijn in de bulge en kepleriaans ($\varphi(r) = -\beta/r$ met $\beta > 0$) daarbuiten, dus als we aannemen dat de totale massa van het sterrenstelsel geconcentreerd is in het centrum van de bulge.

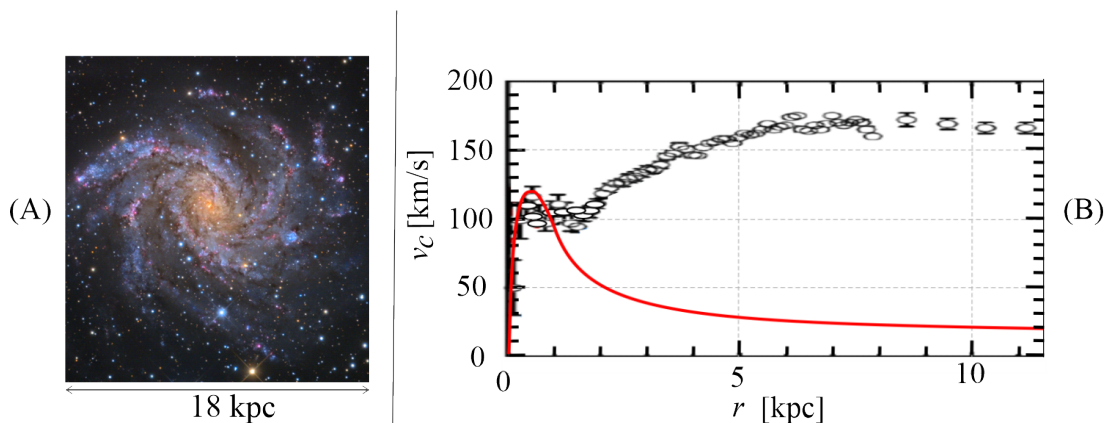


Fig. 1: Sterrenstelsel NGC 6946: Foto (A) en rotatiecurve (B).

- B.2** Leid de massa M_b van de bulge van NGC 6946 af uit de rode rotatiecurve in Fig. 1(B). Druk de massa uit in zonnemassa's. 0.5pt

Door het kepleriaanse model te vergelijken met de experimentele gegevens zijn de astronomen ervan overtuigd dat een deel van de massa onzichtbaar is in het optisch beeld. Ze veronderstellen dus dat de

werkelijke massadichtheid van het sterrenstelsel wordt gegeven door

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

waarbij $C_m > 0$ en $r_m > 0$ constanten zijn.

- B.3** Laat zien dat het snelheidsprofiel, dat overeenkomt met de massadichtheid in formule 1, kan worden geschreven als $v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan(\frac{r}{r_m})}{r}}$. Druk k_1 en k_2 uit in termen van C_m , r_m en G . 1.8pt
- (Hints: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$, en $\arctan(x) \simeq x - x^3/3$ voor $x \ll 1$.)
- Vereenvoudig $v_{c,m}(r)$ als $r \ll r_m$ en als $r \gg r_m$.
 Laat zien dat als $r \gg r_m$, de massa $M_m(r)$ ingebed in een bol met straal r met de massadichtheid gegeven door Eq. 1 eenvoudiger wordt en alleen afhangt van C_m en r .
 Schat de massa van NGC 6946 die werkelijk aanwezig is in de afbeelding in Fig. 1(A).

Deel C - De verdeling van massa in ons sterrenstelsel

Voor een spiraalstelsel is het model voor Eq. 1 aangepast en wordt de zwaartekrachtpotentiaal meestal gegeven door $\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$, waarbij z de afstand tot het galactische vlak is (dat vlak is gedefinieerd door $z = 0$), en $r < r_0$ nu de straal is en $\varphi_0 > 0$ een constante die moet worden bepaald. r_0 en z_0 zijn constante waardes.

- C.1** Bepaal de bewegingsvergelijking afhankelijk van z voor de verticale beweging van een puntmassa m in zo'n potentiaal, ervan uitgaande dat r constant is. Laat zien dat, als $r < r_0$, het galactische vlak een stabiel evenwicht is door de hoekfrequentie ω_0 van kleine oscillaties eromheen te geven. 0.5pt

Vanaf hier werken we bij $z = 0$.

- C.2** Identificeer het regime, $r \gg r_m$ of $r \ll r_m$, waarin het model van Eq. 1 een potentiaal van de vorm $\varphi_G(r, 0)$ toelaat met een geschikte definitie van φ_0 . 0.6pt
 Onder deze voorwaarde hangt $v_c(r)$ niet langer af van r . Druk het uit in termen van φ_0 .

Daarom hangt buiten de bulge de grootte van de snelheid v_c niet af van de afstand tot het galactisch centrum. We zullen dit feit, net als sterrenkundigen, gebruiken om de massaverdeling van het melkwegstelsel van binnenuit te meten.

Alle galactische objecten die hier worden beschouwd voor astronomische waarnemingen, zoals sterren of nevels, bestaan voornamelijk uit waterstof. Buiten de bulge nemen we aan dat ze in cirkelbanen rond het galactische centrum draaien C . S is de positie van de zon en E die van een bepaald galactisch object dat licht uitzendt in het waterstofspectrum. In het galactische vlak beschouwen we een kijklijn SE die overeenkomt met de oriëntatie van een waarneming, op de eenheidsvector $\hat{u}_v$ (zie fig. 2).

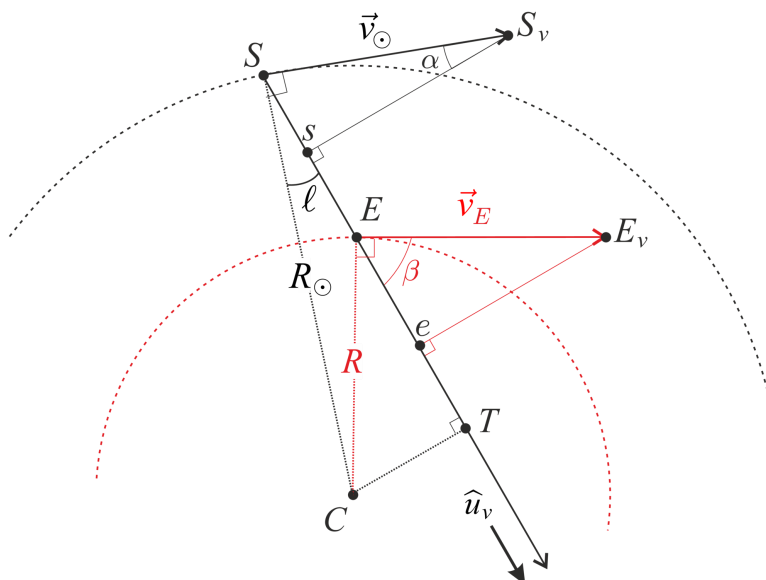


Fig. 2: Geometrie van de meting

De galactische lengtegraad ℓ beschrijft de hoek tussen SC en de SE . De snelheid van de zon op haar cirkelbaan met straal $R_{\odot} = 8.00 \text{ kpc}$ wordt aangeduid als $\vec{v}_{\odot}$. Een galactisch object in E draait op een andere cirkel met straal R met snelheid $\vec{v}_E$. Met behulp van het dopplereffect op de eerder bestudeerde waterstof emissielijn 21 cm kan men de relatieve radiale snelheid $v_{rE/S}$ van de zender E ten opzichte van de zon S verkrijgen: het is de projectie van $\vec{v}_E - \vec{v}_{\odot}$ op de kijklijn.

C.3 Bepaal $v_{rE/S}$ in termen van ℓ , R , $R_\odot$ en $v_\odot$. Bepaal vervolgens R in termen van $R_\odot$, $v_\odot$, ℓ en $v_{rE/S}$. 0.7pt

Met een radiotelescoop doen we waarnemingen in het vlak van ons melkwegstelsel naar een galactische lengtegraad $\ell = 30^\circ$. De gebruikte frequentieband bevat de 21 cm lijn, waarvan de frequentie $f_0 = 1.42$ GHz is. De resultaten staan in Fig. 3.

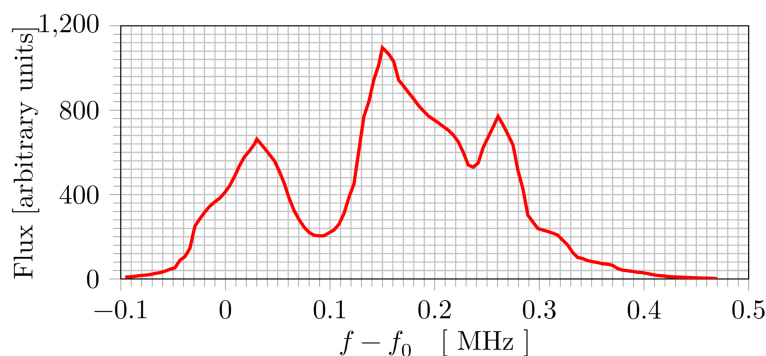


Fig. 3: Elektromagnetisch signaal in functie van de frequentie shift gemeten in de radiofrequentieband op $\ell = 30^\circ$ met behulp van EU-HOU RadioAstronomy

C.4 In ons melkwegstelsel, $v_{\odot} = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Bepaal de waarden van de relatieve radiale snelheid (met 3 significante cijfers) en de afstand tot het galactisch centrum (met 2 significante cijfers) van de 3 bronnen die in Fig. 3 zijn waargenomen. Afstanden moeten worden uitgedrukt als veelvouden van $R_{\odot}$. 0.6pt

C.5 Geef op het bovenaanzicht (in het antwoordvak) van ons melkwegstelsel de posities aan van de bronnen die in Fig. 3 zijn waargenomen. Wat zou je kunnen afleiden uit herhaalde metingen (met veranderende ℓ)? 0.6pt

Deel D - Tully-Fisher relatie en de MOND theorie

De vlakke snelheidscurve buiten de bulge van NGC 6946 in Fig. 1 is een algemene eigenschap van spiraalstelsels, zoals te zien is in Fig. 4 (links). Het uitzetten van de snelheidswaarden $v_{c,\infty}$ in functie van de gemeten totale massa M_{tot} van melkwegstelsels levert een interessante correlatie op die Tully-Fisher-relatie wordt genoemd, zie Fig. 4 (rechts).

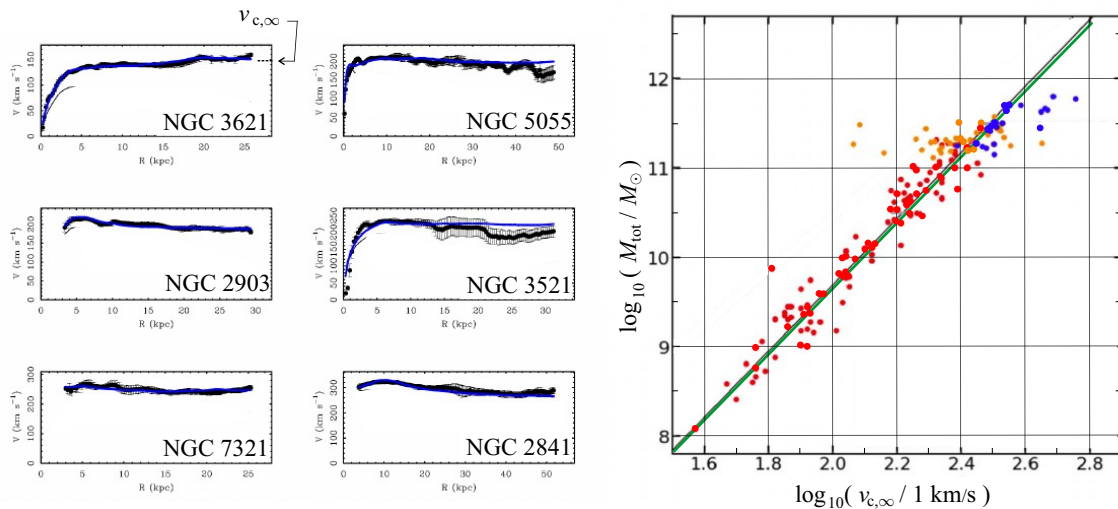


Fig. 4. Links: Rotatiecurves voor typische spiraalstelsels - Rechts: $\log_{10}(M_{\text{tot}})$ als functie van $\log_{10}(v_{c,\infty})$ op lineaire schalen. Geleerde stippen komen overeen met verschillende melkwegstelsels en verschillende onderzoeken. De groene lijn is de Tully-Fisher-relatie (die goed overeenkomt met de beste fit van de gegevens, aangeduid met de zwarte lijn).

D.1 In de veronderstelling dat de straal R van een sterrenstelsel niet afhangt van zijn massa, laat zien dat het model van Eq. 1 (deel B) een relatie geeft van de vorm $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$ waarbij γ en η gespecificeerd moeten worden. Vergelijk deze uitdrukking met de Tully Fisher relatie door γ_{TF} te berekenen. 0.4pt

In het extreem lage versnellingsregime, in de orde van $a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, suggereert de theorie van Modified Newtonian Dynamics (MOND) dat men de tweede wet van Newton kan wijzigen met $\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$ waarbij $a = \|\vec{a}\|$ de grootte van de versnelling is en de μ functie is gedefinieerd als $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$.



- | | | |
|------------|---|-------|
| D.2 | Schat, met behulp van de gegevens voor NGC 6946 in Fig. 1, binnen de klassieke theorie van Newton, de grootte van de versnelling a_m van een massa in de buitenste regionen van het galactisch vlak van NGC 6946. | 0.2pt |
| D.3 | Laat m een massa zijn op een cirkelbaan van straal r met snelheid $v_{c,\infty}$ in het zwaartekrachtsveld van een vaste massa M .
Bepaal binnen de theorie van MOND met $a \ll a_0$ de exponent van Tully-Fischer. Met behulp van de data van NGC 6946 en/of de Tully-Fischer wet, bereken a_0 om aan te tonen dat MOND in het correcte regime zit. | 0.8pt |
| D.4 | Bepaal, rekening houdend met relevante gevallen, $v_c(r)$ voor alle waarden van r in de MOND theorie in het geval van een zwaartekrachtsveld geleverd door een homogeen verdeelde massa M met straal R_b . | 0.9pt |



Waterstof en sterrenstelsels (10 punten)

Deel A - Inleiding

Bohr-model

A.1 (0.2pt)

$$\nu =$$

A.2 (0.5pt)

Uitdrukking : $r_1 =$

Numerieke waarde : $r_1 =$

$$\nu_1 =$$

A.3 (0.5pt)

$$E_n =$$

$$E_1 =$$

Numerieke waarde : $E_1 =$

Waterstof fijne en hyperfijne structuur

A.4 (0.5pt)

$$B_1 =$$

A.5 (0.5pt)

$$\Delta E_F =$$

Uitdrukking voor $\lambda_{\text{HF}} =$

Waarde van $\lambda_{\text{HF}} =$

Deel B - Rotatiecurves van melkwegstelsels

B.1 (0.2pt)

$$\nu_c =$$

**B.2** (0.5pt)

$$M_b =$$

B.3 (1.8pt)

$$k_1 =$$

$$k_2 =$$

$$v_{c,m}(r \ll r_m) \simeq$$

$$v_{c,m}(r \gg r_m) \simeq$$

$$M_m(r \gg r_m) \simeq$$

$$M_{\text{in de figuur}} =$$

Deel C - Verdeling van massa in ons sterrenstelsel**C.1** (0.5pt)

Verticale bewegingsvergelijking :

$$\omega_0 =$$

C.2 (0.6pt)

$$\varphi_0 =$$

$$v_c(r) =$$

C.3 (0.7pt)

$$v_{rE/S} =$$

$$R =$$

C.4 (0.6pt)

$$v_{r,1} =$$

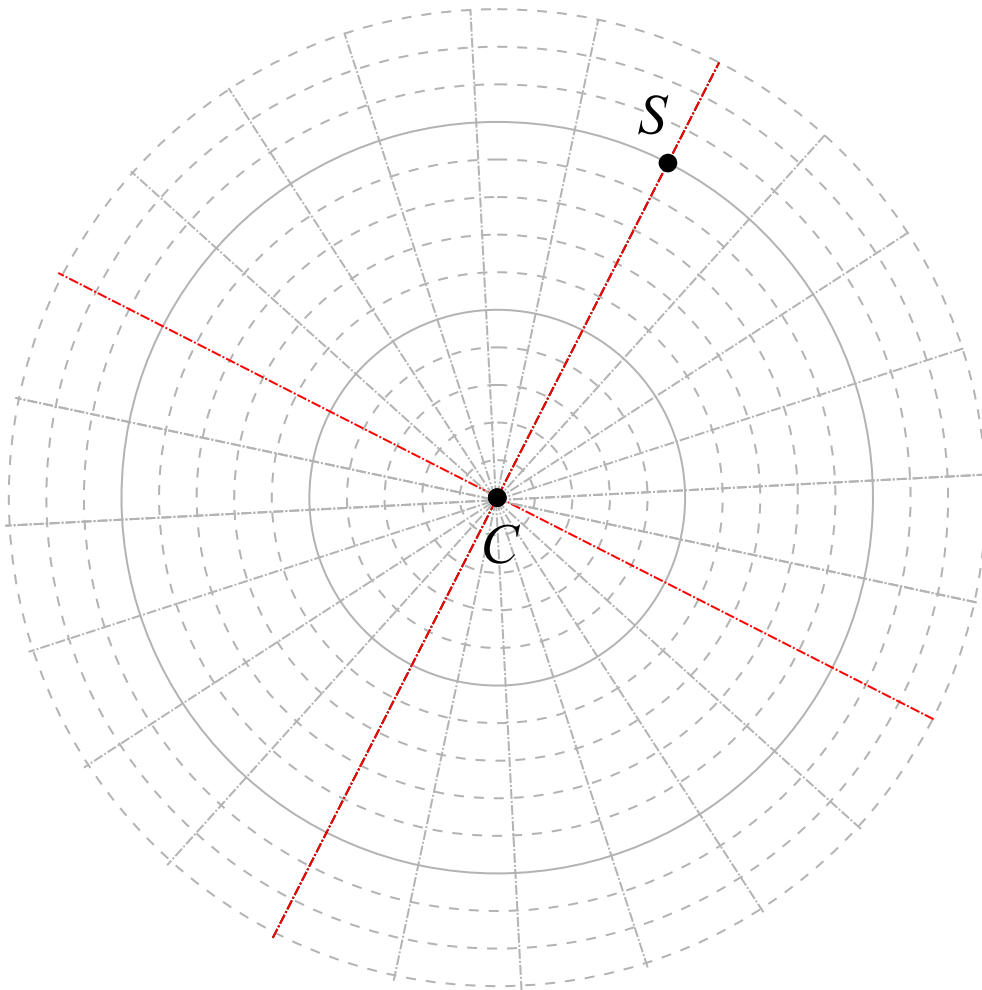
$$v_{r,2} =$$

$$v_{r,3} =$$

$$R_1 =$$

$$R_2 =$$

$$R_3 =$$

C.5 (0.6pt)

Afleiding :

Deel D - Tully-Fisher relatie en de Mond theorie**D.1** (0.4pt) $\eta =$ $\gamma =$ $\gamma_{TF} =$



D.2 (0.2pt)

$$a_m =$$

D.3 (0.8pt)

als $a \ll a_0$ dan $\gamma_{\text{Mond}} =$

$$a_0 =$$

D.4 (0.9pt)

$$v_c(r) =$$

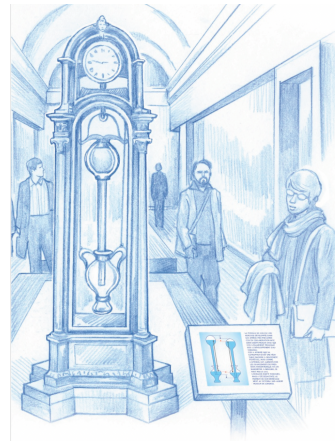
$$v_c(r) =$$

Cox's uurwerk (10 punten)

In 1765 vond de Britse klokkenmaker James Cox een klok uit met als enige energiebron de schommelingen in de atmosferische druk. De klok van Cox maakte gebruik van twee vaten met kwik. Veranderingen in de atmosferische druk zorgden ervoor dat het kwik tussen de vaten bewoog en dat de twee vaten ten opzichte van elkaar bewogen. Deze beweging fungeerde als energiebron voor de klok zelf.

We stellen een analyse van dit apparaat voor. We nemen aan dat

- het zwaartekrachtsveld van de aarde $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ is uniform met $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ en $\vec{u}_z$ een eenheidsvector;
- alle vloeistoffen zijn onsamendrukbaar en hun dichtheid wordt aangeduid met ρ ;
- er wordt geen rekening gehouden met oppervlaktespanningseffecten;
- de variaties van de atmosferische druk met de hoogte worden verwaarloosd;
- de omgevingstemperatuur T_a is uniform en alle transformaties zijn isotherm.



Afb. 1. Artist impression van de klok van Cox¹

Deel A - Trekken aan een buis onder water

We beschouwen eerst een zeer grote waterbak bij $z \leq 0$. De lucht erboven heeft een druk $P_a = P_0$. Een cilindrische verticale buis met lengte $H = 1 \text{ m}$, doorsnede $S = 10 \text{ cm}^2$ en massa $m = 0.5 \text{ kg}$ wordt in de bak gedompeld. Het onderste uiteinde van de buis is open en het top einde van de buis is gesloten. We geven met h de hoogte van de bovenkant van de buis aan en z_ℓ die van het water in de buis. De dikte van de buiswanden wordt verwaarloosd.

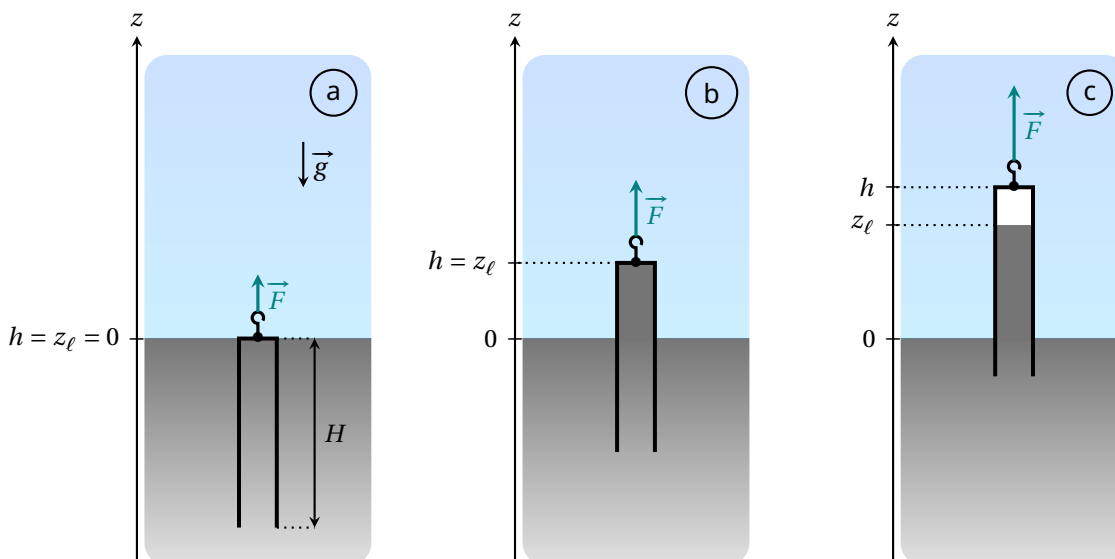


Fig. 2. Schets van de buis in verschillende situaties

We gaan uit van de situatie waarin de buis in Fig. 2 geen gas bevat en de bovenkant zich op het niveau van de bak bevindt: met andere woorden, $h = 0$ en $z_\ell = 0$ (situatie a). De buis wordt dan langzaam omhoog getrokken totdat de onderkant van de buis het niveau van het bak bereikt. De trekkracht die op de buis wordt uitgeoefend, wordt aangeduid met $\vec{F} = F \vec{u}_z$.

- A.1** Druk voor de configuratie in Fig. 2 (geval b) de druk P_w uit in het water bovenaan de buis. Druk ook de kracht $\vec{F}$ uit die nodig is om de buis in deze positie te houden. De gevraagde uitdrukkingen moeten geschreven worden in termen van P_0 , ρ , m , S , h , g en $\vec{u}_z$. 0.2pt

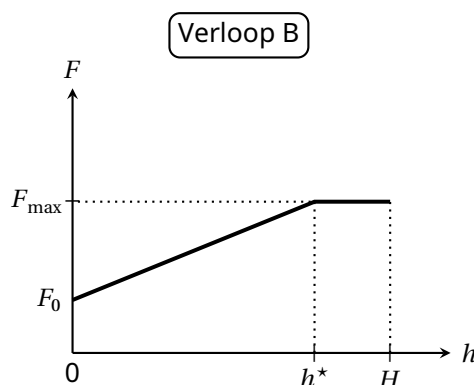
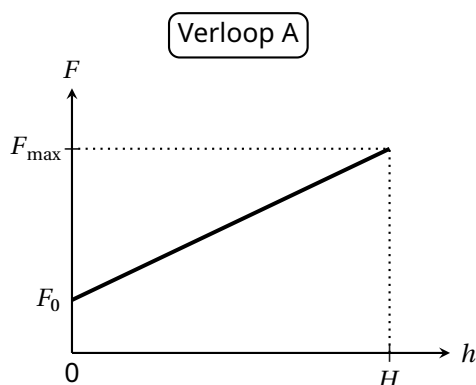
Er worden drie experimenten uitgevoerd. Bij elk wordt de buis omhoog getrokken vanuit de begintoeestand getoond in Fig. 2(a) onder de voorwaarden gespecificeerd in Tabel 1.

Experiment	Vloeistof	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
1	Water	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	Water	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	Water	99	0.96×10^3	99.8×10^3

Tabel 1. Experimentele omstandigheden en numerieke waarden van fysische grootheden voor elk experiment

(P_{sat} geeft de verzadigde dampdruk van de zuivere vloeistof aan)

In elk geval bestuderen we het verloop van de kracht F die moet worden uitgeoefend om de buis in evenwicht te houden op een hoogte h , waarbij de externe druk vastligt op $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Pa. Er zijn twee verschillende soorten verloop mogelijk.



- A.2** Vul voor elk experiment de tabel op het antwoordblad in om het verwachte verloop en de numerieke waarden voor F_{max} en voor h^* (indien relevant) aan te geven, waarbij F_{max} en h^* gedefinieerd zijn in de figuren die de twee verlopen illustreren. 0.8pt

Wanneer we het water vervangen door vloeibaar kwik (waarvan de eigenschappen hieronder worden gegeven), wordt verloop B waargenomen.

Vloeistof	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
Kwik	20	13.5×10^3	0.163

- A.3** Druk de relatieve fout uit, aangeduid als ε , die optreedt wanneer we de maximale kracht F_{max} bepalen en daarbij P_{sat} verwaarlozen in vergelijking met P_0 . Geef de numerieke waarde van ε . 0.3pt

Deel B - Tweedelige barometrische buis

Vanaf nu werken we met kwik (dichtheid $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) bij de omgevingstemperatuur $T_a = 20^\circ\text{C}$ en nemen we $P_{\text{sat}} = 0$.

Laten we een buis nemen met een reservoir erop, gemodelleerd als twee boven elkaar geplaatste cilinders van verschillende afmetingen, zoals getoond in Fig. 3.

- het onderste deel (nog steeds de buis genoemd) heeft een dwarsdoorsnede S_t en een hoogte $H_t = 80 \text{ cm}$;
- het bovenste deel (het reservoir genoemd) heeft een dwarsdoorsnede $S_b > S_t$ en een hoogte $H_b = 20 \text{ cm}$.

Deze tweedelige buis wordt in een semi-oneindige bak met vloeistof gedompeld.

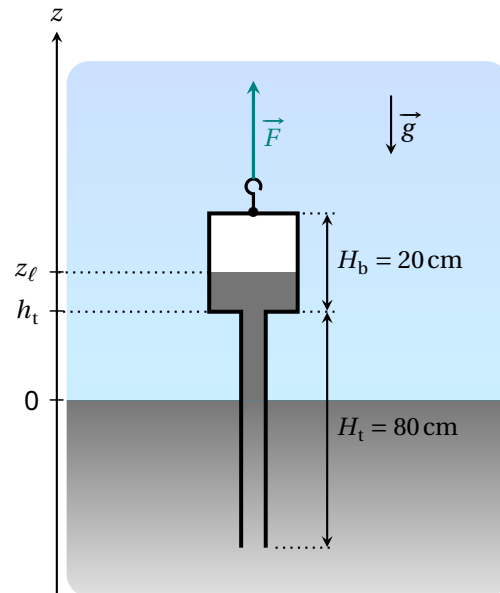


Fig. 3. Schets van de tweedelige barometerbuis

Net als in deel A wordt het systeem zo voorbereid dat de buis geen lucht bevat. We identificeren de verticale positie van de buis door de hoogte h_t van de verbinding tussen het onderste deel van de buis en het reservoir. De hoogte van de kwikkolom wordt weer aangeduid met z_ℓ . De kracht $\vec{F}$ die moet worden uitgeoefend om de buis in evenwicht te houden in de configuratie van fig. 3 kan nu worden geschreven als

$$\vec{F} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}}) g \vec{u}_z \quad (1)$$

waarbij m_{tb} de totale massa van de tweedelige buis is (wanneer deze geen kwik bevat).

- B.1** Kleur op het antwoordblad het gebied dat overeenkomt met het volume vloeibaar kwik dat verantwoordelijk is voor de term m_{add} in vergelijking (1). 0.3pt

De massa m_{add} hangt zowel af van de hoogte h_t als van de luchtdruk P_a . Neem voor de volgende vraag aan dat de atmosferische druk vaststaat op $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$. Uitgaande van de situatie waarin het systeem volledig is ondergedompeld, wordt de buis langzaam opgetild totdat de bodem gelijk is met de bak vloeistof.

- B.2** Schets de ontwikkeling van de massa m_{add} als functie van h_t voor $h_t \in [-H_b, H_t]$. 1.4pt
Geef op de grafiek de uitdrukking voor de hellingen van de verschillende segmenten, evenals de h_t analytische waarde van eventuele hoekpunten, in termen van P_0 , ρ , g , S_b , S_t , H_b en H_t .

Aangezien het systeem wordt opgetild met $P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, stoppen we wanneer het vrije oppervlak van de vloeistof zich in het midden van het reservoir bevindt. De waarde van h_t wordt gefixeerd en dan observeren we variaties in de massa m_{add} door variaties in de atmosferische druk beschreven door

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

waarbij P_0 de gemiddelde waarde aangeeft en P_1 een perturbatieve term is. We modelleren P_1 door een periodieke driehoeksfunctie met amplitude $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ en periode τ_1 van 1 week.

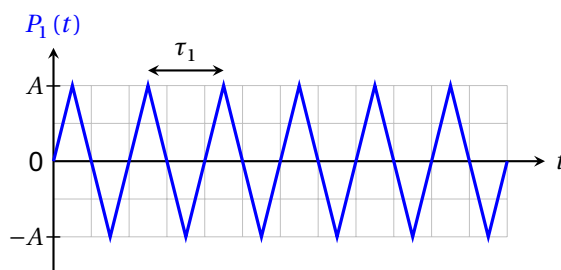


Fig. 4. Vereenvoudigd model van de perturbatieve term $P_1(t)$

- B.3** Gegeven dat $S_t = 5 \text{ cm}^2$ en $S_b = 200 \text{ cm}^2$, druk de amplitude Δm_{add} van de variaties van de massa m_{add} in de tijd uit en geef dan de numerieke waarde. Ga ervan uit dat het vloeistofoppervlak altijd in het reservoir blijft. 0.3pt

Deel C - Het uurwerk van Cox

Het echte mechanisme dat door Cox is ontwikkeld, is ingewikkeld (Fig. 5). We bestuderen een vereenvoudigde versie, afgebeeld in Fig. 6 en hieronder beschreven.

- een bak met cilindrische bodem met een kwikbad;
- een tweedelige barometrische buis die identiek is aan de buis die in deel B is bestudeerd en die nog steeds volledig van lucht is ontdaan, wordt in de bak gedompeld;
- de bak en de tweedelige buis worden elk aan een kabel opgehangen. Beide kabels (waarvan wordt aangenomen dat ze niet uitrekbaar zijn en een verwaarloosbare massa hebben) gaan door een systeem van ideale katrollen en eindigen aan weerszijden van een en dezelfde massa M , die over een horizontaal oppervlak kan schuiven/glijden;
- het totale volume vloeibaar kwik in het systeem is $V_\ell = 5 \text{ L}$.

De hoogte, doorsnede en massa's van elk onderdeel staan in tabel 2. De positie van massa M wordt weergegeven door de coördinaat x van het massamiddelpunt. We beschouwen vaste wrijving tussen de horizontale steun en de massa M , zonder onderscheid tussen statische en dynamische coëfficiënten; de grootte van deze kracht bij het glijden wordt F_s genoemd.

Twee stops beperken de verplaatsing van de massa M zodanig dat $-X \leq x \leq X$ (met $X > 0$). Neem aan dat de waarde van X garandeert dat

- de onderkant van de tweedelige buis raakt nooit de bodem van de bak en komt ook niet uit het vloeistofbad;
- de hoogte z_ℓ van de kwikkolom zich altijd in het reservoir bevindt.



Fig. 5. Echt Cox's uurwerk ² (zonder kwik)

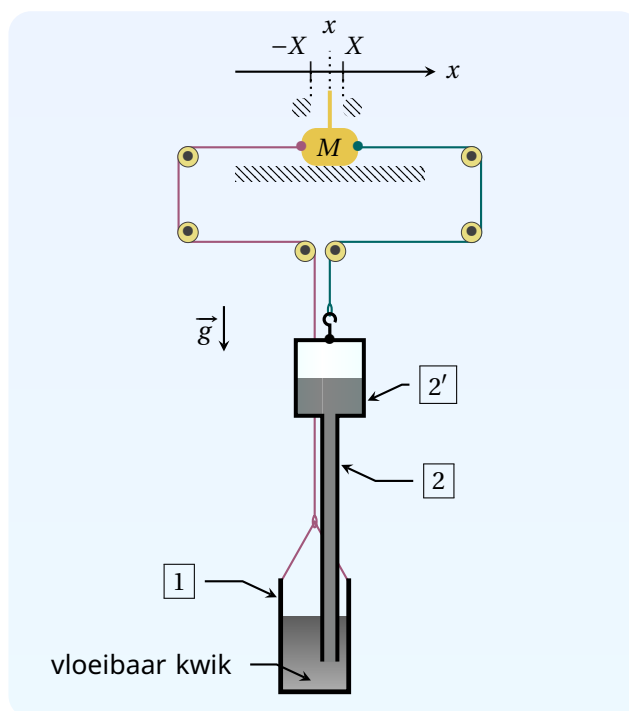


Fig. 6. Schets van het systeem dat het uurwerk modelleert

Referentie	Naam	Hoogte	Dwarsdoorsnede	Lege massa
1	bak	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
2	buisvormig deel van de barometrische buis	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	totale massa van de barometrische buis : m_{tb}
2'	reservoir van de barometrische buis	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

Tabel 2. Afmetingen en notaties voor het modelsysteem

Het systeem evolueert in contact met de atmosfeer, waarvan de druk fluctueert zoals in Fig. 4 (nog steeds met amplitude $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ en periode $\tau_1 = 1 \text{ week}$). Bij de start $t = 0$ is de massa M in rust op $x = 0$ en de spankracht uitgeoefend door de twee kabels aan weerszijden van de massa M zijn in evenwicht en $P_1(0) = 0$. We definiëren

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

Bij de laatste stap in deze uitdrukking wordt gebruikt van $S_t \ll S_b, S_c$ (waarvan we aannemen dat deze geldig is tot het einde van het probleem).

- C.1** Bereken de drempelwaarde (threshold) ξ^* zodat M oneindig in rust blijft als $\xi > \xi^*$. 1pt

Alleen voor de volgende vraag: Stel dat de massa M tijdelijk vast staat op $x = X$.

- C.2** Geef een uitdrukking voor de totale trekkracht $\vec{T} = T \vec{u}_x$ die op de massa M werkt als gevolg van de spankracht in twee kabels op deze positie, wanneer $P_1 = 0$, in termen van ρ , g , X en relevante doorsneden. 1pt

Als $\xi < \xi^*$ en opnieuw gestart wordt met $x = 0$ en $P_1 = 0$ dan kunnen er twee verschillende soorten verloop worden waargenomen voor $t \geq 0$. Om deze te onderscheiden, moeten we een andere parameter invoeren

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

- C.3** Vul de tabel op het antwoordblad in om aan te geven onder welke voorwaarde elk verloop wordt verkregen. De voorwaarden moeten worden uitgedrukt als ongelijkheden voor ξ en/of λ . Schets daarnaast de variaties van $x(t)/X$ voor $t \in [0, 3\tau_1]$ die overeenkomen met de variaties van $P_1(t)/A$ die al aanwezig zijn. *Specificatie van opmerkelijke puntcoördinaten is niet vereist.* 2pt

In het echte uurwerk van Cox wordt de door het mechanisme geleverde energie opgeslagen met behulp van een systeem van ratels en gebruikt om een contragewicht op te tillen, zoals in een traditionele klok.

In het hier bestudeerde vereenvoudigde model komt de energie die door de klok wordt teruggewonnen overeen met de energie die verloren gaat door de wrijvingskracht die door het horizontale oppervlak op de massa M wordt uitgeoefend.

Vanaf nu nemen we aan dat het systeem zo gedimensioneerd is dat het werkt in het regime waarin de klok energie kan terugwinnen. We nemen ook aan dat het permanente regime is ingesteld.

We duiden W aan als de energie die verloren gaat door de vaste wrijvingskracht gedurende een periode τ_1 , die kan worden uitgedrukt in termen van alleen F_s en X .

Verder kunnen F_s en X worden aangepast om de energie W te maximaliseren; we geven met F_s^* en X^* hun respectievelijke waarden in deze optimale situatie.

- C.4** Voor $S_b \simeq S_c$ en $S_t \ll S_b$, bepaal de uitdrukkingen voor F_s^* en X^* als functies van ρ , g , S_c en A . Leid de uitdrukking af voor de overeenkomstige maximumenergie W^* uit en bereken vervolgens de numerieke waarde ervan met $A = 5 \times 10^2$ Pa. 1pt

We geven met W_{pr}^* de arbeid aan van de atmosferische drukkrachten ontvangen door het systeem in de optimale situatie gedurende een periode τ_1 .

- C.5** Leid een uitdrukking af voor W_{pr}^* en bereken vervolgens de verhouding W^*/W_{pr}^* . 1.7pt
Het kan nuttig zijn om de ontwikkeling van het systeem weer te geven in een (P, V) diagram, waarbij V het volume van het systeem is.

Met dank aan:

[1]: Bruno Vacaro;

[2]: Victoria en Albert Museum, Londen.

Cox's uurwerk (10 punten)

Deel A - Trekken aan een buis onder water

A.1 (0.2pt)

$$P_w =$$

$$\vec{F} =$$

A.2 (0.8pt)

Experiment	Gedrag (A of B?)	h^* (cm)	$F_{\max}$ (N)
1			
2			
3			

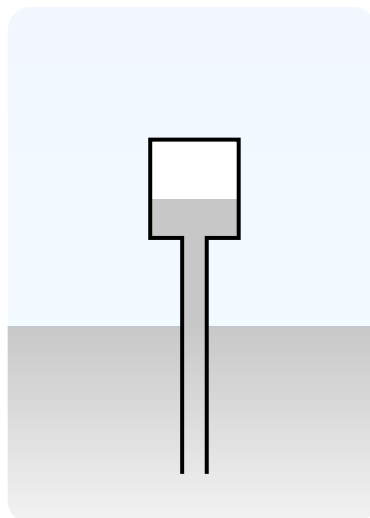
A.3 (0.3pt)

$$\varepsilon =$$

Numerieke waarde: $\varepsilon =$

Deel B - Tweedelige barometrische buis

B.1 (0.3pt)



**B.2** (1.4pt)**B.3** (0.3pt)

$\Delta m_{\text{add}} =$

Numerieke waarde: $\Delta m_{\text{add}} =$

Deel C - Het uurwerk van Cox**C.1** (1pt)

$\xi^* =$

C.2 (1pt)

$\vec{T} =$

C.3 (2pt)

	Voorwaarde voor observatie	Grafiek van $x(t)/X$
Verloop 1		
Verloop 2		

C.4 (1pt)

$F_s^* =$

$X^* =$

$W^* =$

Numerieke waarde: $W^* =$

C.5 (1.7pt)

$W_{\text{pr}}^* =$

$\frac{W^*}{W_{\text{pr}}^*} =$

Champagne! (10 punten)

Waarschuwing: Overmatig alcoholgebruik is schadelijk voor de gezondheid en het drinken van alcohol onder de wettelijke leeftijd is verboden.

Champagne is een Franse mousserende wijn ("bubbeltjes" wijn). Bij gisting van suikers ontstaat koolstofdioxide (CO_2) in de fles. De molaire concentratie van CO_2 in de vloeistoffase c_ℓ en de partiële druk P_{CO_2} in de gasfase zijn aan elkaar gerelateerd door $c_\ell = k_H P_{\text{CO}_2}$, ook wel bekend als de wet van Henry, waarbij k_H Henry's constante is.

Gegevens

- Oppervlaktespanning van champagne $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- Dichtheid van de vloeistof $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Henry's constante op $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $k_H(20^\circ\text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Henry's constante op $T_0 = 6^\circ\text{C}$, $k_H(6^\circ\text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Atmosferische druk $P_0 = 1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- De gasen worden als ideaal beschouwd met een adiabatische coëfficiënt $\gamma = 1.3$



Fig. 1. Een glas gevuld met champagne.

Deel A. Nucleatie, groei en vorming van bellen

Onmiddellijk na het openen van een fles champagne met temperatuur $T_0 = 20^\circ\text{C}$, vullen we een glas. De druk in de vloeistof is P_0 en de temperatuur T_0 blijft constant. De concentratie c_ℓ van opgeloste CO_2 overschrijdt de evenwichtsconcentratie en wij bestuderen de nucleatie van CO_2 bellen. We noteren dat a de straal en P_b de interne druk zijn van de bel.

A.1 Geef een uitdrukking voor de druk P_b in termen van P_0 , a en σ .

0.2pt

In de vloeistof is de concentratie van opgelost CO_2 afhankelijk van de afstand tot de bel. Over grote afstanden is de concentratie gelijk aan c_ℓ en dichtbij het oppervlak van de bel is de concentratie gelijk aan c_b . Door Henry's wet is $c_b = k_H P_b$. We nemen aan dat in het gehele probleem de bel alleen uit CO_2 bestaat.

Omdat $c_\ell \neq c_b$ diffunderen CO_2 moleculen van gebieden met een hoge naar gebieden met een lage concentratie. We nemen aan dat elke molecuul die vanuit de vloeistoffase het oppervlak van de bel bereikt ook wordt overgedragen aan de gasfase in de bel.

A.2 Druk de kritische straal a_c waarboven een bel naar verwachting zal groeien uit in termen van P_0 , σ , c_ℓ en c_0 waarbij $c_0 = k_H P_0$. Bereken de numerieke waarde van a_c voor $c_\ell = 4c_0$.

0.5pt

In de praktijk, groeien bellen uit reeds bestaande gasholten. Beschouw een bolvormige bel met een beginstraal $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$. Het aantal mol CO_2 dat per oppervlakte- en tijdseenheid aan het oppervlak van de bel wordt overgedragen, wordt j genoemd. Er zijn twee modellen mogelijk voor j .

- model (1) $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$ waarbij D de diffusiecoëfficiënt van CO_2 in de vloeistof is.
- model (2) $j = K(c_\ell - c_b)$ waarbij K hier een constante is.

Experimenteel is vastgesteld dat de bellenstraal $a(t)$ afhangt van de tijd, zoals getoond in **Fig. 2**. Hierbij is $c_\ell \approx 4c_0$, en aangezien de bellen groot genoeg zijn om zichtbaar te zijn kan de overdruk ten gevolge van oppervlakespanning worden verwaarloosd, waardoor $P_b \approx P_0$.

- A.3** Druk het aantal mol CO_2 in de bel n_c uit in termen van a, P_0, T_0 en de ideale gasconstante R . Bepaal $a(t)$ voor beide modellen. Geef aan welk model de experimentele resultaten in **fig. 2** verklaart. Bereken, afhankelijk van je antwoord, de waarde van K of D . 1.2pt

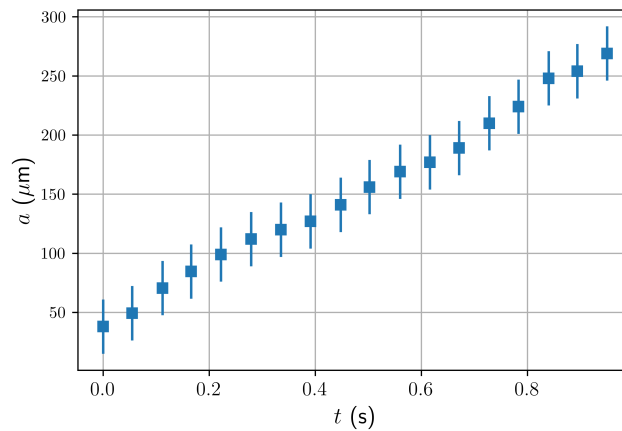


Fig. 2. Groei van de straal van de CO_2 bellen in een glas champagne (*aangepast van [1]*).

Uiteindelijk komen de bellen los van de bodem van het glas en blijven ze groeien terwijl ze opstijgen. **Fig. 3** toont een trein van bellen. De bellen van de trein hebben dezelfde beginstraal en worden uitgezonden met een constante frequentie $f_b = 20 \text{ Hz}$.

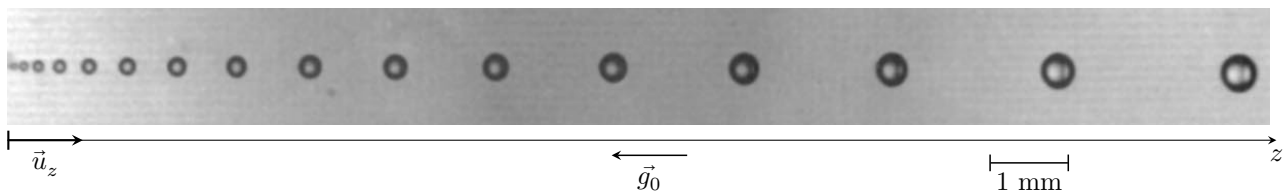


Fig. 3. Een trein van bellen. De foto is horizontaal gedraaid om rekening te houden met de pagina-indeling (*aangepast van [1]*).

Voor het hier bestudeerde snelheidsbereik wordt de weerstandskracht F op een bel met straal a die met snelheid v beweegt in een vloeistof met dynamische viscositeit η gegeven door de wet van Stokes $F = 6\pi\eta av$. Metingen tonen aan dat op elk moment kan worden aangenomen dat de bel met zijn eind-snelheid (terminal velocity) beweegt.

- A.4** Geef de uitdrukking van de belangrijkste krachten die op de verticaal stijgende bel worden uitgeoefend. Leid de uitdrukking van $v(a)$ af. Geef een numerieke schatting van η door gebruik te maken van ρ_ℓ, g_0 en grootheden gemeten vanaf **Fig. 3**. 0.8pt

De quasi-stationaire groei van bellen met snelheid $q_a = \frac{da}{dt}$ is nog steeds van toepassing tijdens het stijgen van de bellen.

- A.5** Druk de straal a_{H_ℓ} van een bel die het vrije oppervlak bereikt uit in termen van afgelegde hoogte H_ℓ , groeisnelheid $q_a = \frac{da}{dt}$ en eventuele constanten. Neem aan dat $a_{H_\ell} \gg a_0$ en dat q_a constant is en geef de numerieke waarde van a_{H_ℓ} met $H_\ell = 10 \text{ cm}$ en q_a overeenkomstig **fig. 2**. 0.5pt

Er zijn N_b nucleatieplaatsen van bellen. Veronderstel dat de belletjes met een constante frequentie f_b ontstaan op de bodem van een glas champagne (hoogte H_ℓ voor een volume V_ℓ), waarbij a_0 nog verwaarloosbaar is. Verwaarloos diffusie van CO_2 aan het vrije oppervlak.

- A.6** Schrijf de differentiaalvergelijking voor $c_\ell(t)$. Bereken uit deze vergelijking de karakteristieke tijd τ voor het verval van de concentratie van opgelost CO_2 in de vloeistof. 1.1pt

Deel B. Akoestische emissie van een barstende zeepbel

Kleine bellen zijn bijna bolvormig als ze het vrije oppervlak bereiken. Zodra de vloeistoffilm die de bel van de lucht scheidt voldoende is uitgedund, vormt zich een cirkelvormig gat met een straal van r in de film dat, aangedreven door de oppervlaktetenspanning, zeer snel opengaat (**Fig. 4**. links). Het gat opent met constante snelheid v_f (**Fig. 4**. rechts). De film buiten de rand blijft stilstaan, met constante dikte h .

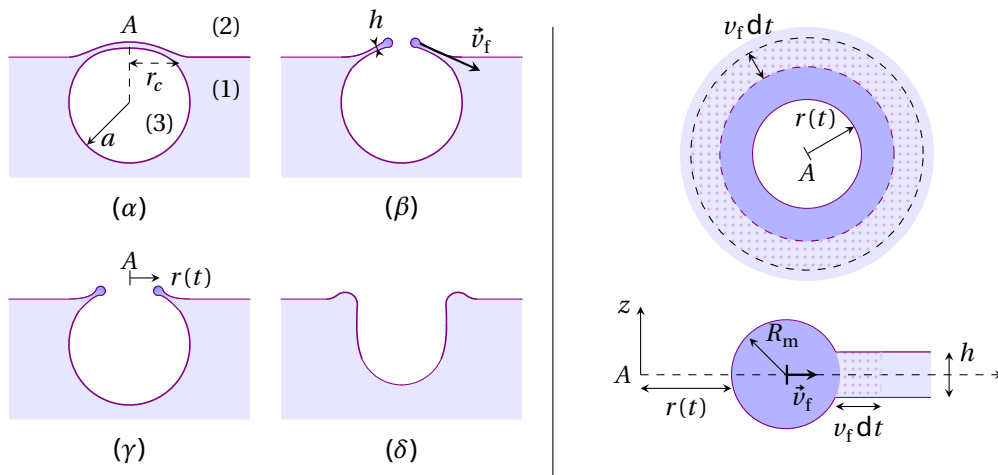


Fig. 4. (Links) (α) Bubbels aan het oppervlak: (1) vloeistof, (2) lucht bij druk P_0 en (3), CO_2 bij druk P_b , (β) en (γ) terugtrekking van de vloeistoffilm, waarbij de rand in donkerblauw is, (δ) ineenstorting van de bel. (Rechts) Intrekking van de vloeistoffilm op tijdstip t . Boven: schets van de doorboorde film van bovenaf gezien. Onder: dwarsdoorsnede van de rand en de intrekende film. Tijdens dt accumuleert de rand nabijgelegen vloeistof (gestippeld).

Als gevolg van dissipatieve processen wordt slechts de helft van het verschil van de oppervlakte-energie tussen t en $t + dt$ van de rand en de geaccumuleerde vloeistof omgezet in kinetische energie. We nemen verder aan dat de variatie van het oppervlak van de rand verwaarloosbaar is vergeleken met die van de film.

- B.1** Druk v_f uit in termen van ρ_ℓ , σ en h . 1.1pt

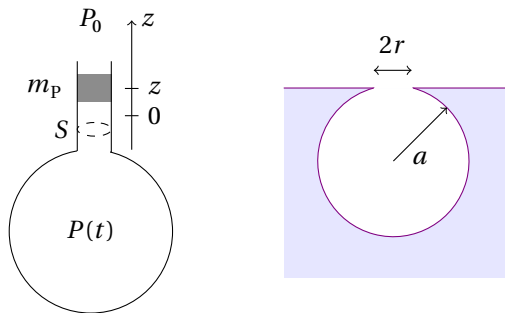


Fig. 5. (Links) een Helmholtz-resonator. (Rechts) een bel als oscillator.

Wanneer de film barst, komt er interne druk vrij en wordt er geluid uitgezonden. We modelleren deze akoestische emissie met een Helmholtzresonator: een holte die openstaat naar de atmosfeer op P_0 via een flessenhalsopening met een oppervlakte van S (**Fig. 5.** links). In de hals maakt een massa m_p positie-oscillaties van kleine amplitude als gevolg van de drukkrachten die het ondervindt wanneer het gas in de holte adiabatisch uitzet of samendrukt. De zwaartekracht op m_p is verwaarloosbaar ten opzichte van de druk. Laat V_0 het volume gas onder de massa m_p voor $P = P_0$ als $z = 0$ zijn.

B.2 Druk de oscillatiefrequentie f_0 van m_p uit. Hint: voor $\varepsilon \ll 1$, $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$.

1.1pt

Het Helmholtz-model kan worden gebruikt voor een bel met een straal van a . V_0 is het volume van de gesloten bel. Uit de literatuur blijkt dat de massa van het equivalent van de zuiger (piston) $m_p = 8\rho_g r^3/3$ is, waarbij de straal van de cirkelvormige opening en $\rho_g = 1.8\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ de dichtheid van het gas is (**fig. 5.** rechts). Tijdens het barstproces gaat r van 0 naar r_c , gegeven door $r_c = \frac{2}{\sqrt{3}} a^2 \sqrt{\frac{\rho_\ell g_0}{\sigma}}$. Tegelijkertijd neemt de frequentie van het uitgezonden geluid toe tot een maximumwaarde van 40 kHz en de barsttijd is $t_b = 3 \times 10^{-2} \text{ ms}$.

B.3 Bereken de straal a en de dikte h van de champagnefilm die de bel van de atmosfeer scheidt.

1.1pt

Deel C. Champagne knallen

In een fles is de totale hoeveelheid CO_2 gelijk aan $n_T = 0.2 \text{ mol}$ per fles. Hierbij is CO_2 opgelost in het volume $V_L = 750 \text{ mL}$ van de vloeibare champagne, of als gas in het volume $V_G = 25 \text{ mL}$ onder de kurk (**afb. 6.** links). V_G bevat alleen CO_2 . Het evenwicht tussen beide CO_2 fasen volgt de Wet van Henry. We veronderstellen dat de snelle gasvormige CO_2 expansie bij het openen van de fles adiabatisch en omkeerbaar is. De omgevingstemperatuur T_0 en de druk $P_0 = 1 \text{ bar}$ zijn constant.

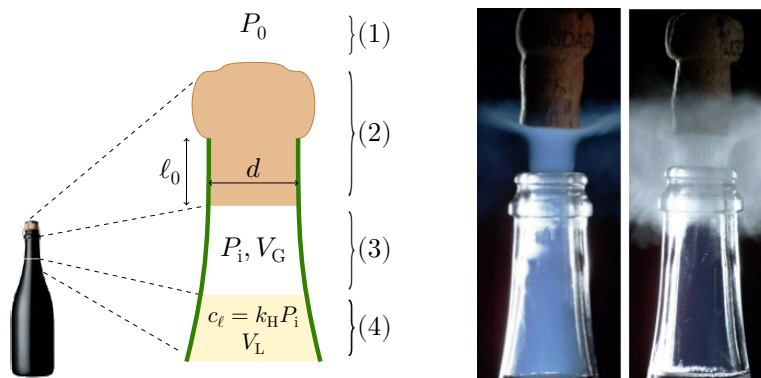


Fig. 6. *Links:* traditionele flessenhals (1) omgevingslucht, (2) kurk, (3) headspace (lege ruimte onder de kurk), (4) vloeibare champagne. *Rechts:* Twee fenomenen waargenomen tijdens het openen van de fles bij twee verschillende temperaturen (aangepast van [2]).

C.1 Geef de numerieke waarde van de druk P_i van gasvormig CO_2 in de fles voor $T_0 = 6^\circ\text{C}$ en $T_0 = 20^\circ\text{C}$. 0.4pt

Een andere stap van champagneproductie (hier niet beschreven) leidt tot de volgende waarden van P_i die we zullen gebruiken voor de volgende vragen $P_i = 4.69$ bar op $T_0 = 6^\circ\text{C}$ en $P_i = 7.45$ bar op $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

Tijdens het openen van de fles kunnen twee verschillende verschijnselen worden waargenomen, afhankelijk van T_0 (Fig. 6. rechts).

- of er verschijnt een blauwe mist door de vorming van vaste CO_2 kristallen (maar watercondensatie wordt geremd);
- of er ontstaat een grijswitte mist door condensatie van waterdamp in de lucht rond de flessenhals. in dit laatste geval is er geen vorming van CO_2 vastestof kristallen.

De verzadigde dampdruk $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$ voor de CO_2 vastestof/gas faseovergang: $\log_{10} \left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0} \right) = A - \frac{B}{T + C}$ met T in K, $A = 6.81$, $B = 1.30 \times 10^3$ K en $C = -3.49$ K.

C.2 Geef de numerieke waarde T_f van het gas CO_2 aan het einde van de expansie, na het openen van een fles, als $T_0 = 6^\circ\text{C}$ en als $T_0 = 20^\circ\text{C}$, als er geen faseovergang heeft plaatsgevonden. Kies welke beweringen waar zijn (meerdere beweringen mogelijk): 0.7pt

1. Op $T_0 = 6^\circ\text{C}$ verschijnt een grijswitte mist bij het openen van de fles.
2. Op $T_0 = 6^\circ\text{C}$ verschijnt een blauwe mist bij het openen van de fles.
3. Op $T_0 = 20^\circ\text{C}$ verschijnt een grijswitte mist bij het openen van de fles.
4. Op $T_0 = 20^\circ\text{C}$ verschijnt een blauwe mist bij het openen van de fles.

Tijdens het openen van de fles springt de kurk eruit. We bepalen nu de maximale hoogte H_c die de kurk bereikt. Neem aan dat de wrijvingskracht F door de flessenhals op de kurkstop $F = \alpha A$ is, waarbij A het contactoppervlak is en α een te bepalen constante. Aanvankelijk overwint de drukkracht enigszins de wrijvingskracht. De massa van de kurk is $m = 10$ g, de diameter $d = 1.8$ cm en de lengte van het cilindrische deel dat aanvankelijk vastzit in de flessenhals is $\ell_0 = 2.5$ cm. Zodra de kurk de flessenhals heeft verlaten, mag je de netto kracht door de druk verwaarlozen.



C.3 Geef de numerieke waarde van H_c als de buitentemperatuur $T_0 = 6^\circ\text{C}$ is.

1.3pt

[1] Liger-Belair *et al*, Am. J. Enol. Vitic., Vol. 50, No. 3 (1999).

[2] Liger-Belair *et al*, Sc. Reports **7**, 10938 (2017).



Champagne! (10 punten)

Deel A. Nucleatie, groei en vorming van bellen

A.1 (0.2pt)

$$P_b =$$

A.2 (0.5pt)

$$a_c =$$

Numerieke waarde van $a_c =$

A.3 (1.2pt)

$$n_c =$$

Model (1) $a(t) =$

Model (2) $a(t) =$

Gekozen model:

Numerieke waarde van $K =$

Numerieke waarde van $D =$

A.4 (0.8pt)

Krachten op de bel:

$$\nu(a) =$$

Numerieke waarde van $\eta =$

**A.5** (0.5pt)

$$a_{H_\ell} =$$

Numerieke waarde van $a_{H_\ell} =$ **A.6** (1.1pt)Differentiaalvergelijking voor $c_\ell(t)$:

$$\tau =$$

Deel B. Akoestische emissie van een barstende zeepbel**B.1** (1.1pt)

$$\nu_f =$$

B.2 (1.1pt)

$$f_0 =$$

B.3 (1.1pt)Numerieke waarde van $a =$ Numerieke waarde van $h =$ **Deel C. Champagne knallen****C.1** (0.4pt)Voor $T_0 = 6^\circ\text{C}$, numerieke waarde van $P_i =$ Voor $T_0 = 20^\circ\text{C}$, numerieke waarde van $P_i =$



C.2 (0.7pt)

Als $T_0 = 6^\circ\text{C}$, numerieke waarde van $T_f =$

Als $T_0 = 20^\circ\text{C}$, numerieke waarde van $T_f =$

Ware beweringen (getallen):

C.3 (1.3pt)

Numerieke waarde van $H_c =$