

TOETS 1

1 Bergbeklimmer (5 pt)

- (a) Het werk-energieprincipe zegt dat de netto arbeid die wordt verricht de verandering in kinetische energie is.

De klimmer begint en eindigt de val in rust, dus de verandering in kinetische energie is 0. Dus de totale arbeid die verricht wordt (door de zwaartekracht en door het touw) moet 0 zijn. Dit wordt gebruikt om x te vinden. Merk op dat de zwaartekracht evenwijdig is aan de verplaatsing, dus de arbeid die verricht wordt door de zwaartekracht is positief, maar de kracht die uitgeoefend wordt door het touw is in de tegenovergestelde richting van de verplaatsing, dus de arbeid die verricht wordt door het touw is negatief.

$$W_{\text{net}} = W_{\text{grav}} + W_{\text{rope}} = mg(2l + x) - \frac{1}{2}kx^2 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mgx - 2lmg = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 - 4\left(\frac{1}{2}k\right)(-2lmg)}}{2\left(\frac{1}{2}k\right)} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 4klmg}}{k} = \frac{mg}{k} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4kl}{mg}} \right)$$

We hebben aangenomen dat x positief is in de uitdrukking voor de zwaartekrachtarbeid, en dus moet het plusteken in de bovenstaande uitdrukking worden genomen. Dus

$$x = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4kl}{mg}} \right)$$

- (b) Gebruik de gegevens worden om $\frac{x}{l}$ en $\frac{kx}{mg}$ te berekenen.

$$x = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4kl}{mg}} \right) = \frac{(85\text{kg})(9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{(850\frac{\text{N}}{\text{m}})} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4(850\frac{\text{N}}{\text{m}})(8,0\text{m})}{(85\text{kg})(9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2})}} \right) = 6,665 \text{ m}$$

$$\frac{x}{l} = \frac{6,665\text{m}}{8,0\text{m}} = 0,83 ; \quad \frac{kx}{mg} = \frac{(850\frac{\text{N}}{\text{m}})(6,665\text{m})}{(85\text{kg})(9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2})} = 6,8$$

2 Metalen geladen bol (5 pt)

Als een condensator met capaciteit C en beginlading Q_0 ontlaadt door een ohmse weerstand R , dan neemt de lading $Q(t)$ op de condensator af met de tijd volgens

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

En het bereikt de waarde van $Q_0/2$ in een tijd van

$$T_{1/2} = RC \ln 2$$

In de analoge situatie in het probleem is C de capaciteit van de 'geïsoleerde' metalen bol en R de 'effectieve weerstand' van de slecht geleidende lucht.

De capaciteit van de bol is eenvoudig te bepalen. De potentiaal, ten opzichte van een punt op oneindig, van een bol met een straal r_0 en een lading Q is $Q/4\pi\epsilon_0 r_0$ en dus is de capaciteit

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_0$$

De bepaling van de effectieve weerstand van de lucht rond de bol is iets ingewikkelder. De lucht, met een weerstand $1/\sigma$ kan denkbeeldig verdeeld worden in dunne bolvormige schillen concentrisch met de bol. Laat de dikte van een schil bij straal r Δr zijn. De oppervlakte is $4\pi r^2$ en dus is de elektrische weerstand (voor radiale stromen)

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta r}{4\pi r^2}$$

En de netto weerstand van alle bolvormige omhulsels, in serie geschakeld, is

$$R = \sum \Delta R = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum \frac{\Delta r}{r^2}$$

Deze som kan (zonder benadering) worden berekend door $\Delta r \rightarrow 0$ te laten, wat de integraal oplevert

$$R = \sum \Delta R = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma r_0}$$

Hetzelfde resultaat kan ook gevonden worden zonder integratie, door gebruik te maken van het feit dat de potentiaal van een puntlading, ten opzichte van een referentiepunt op oneindig, berekend kan worden uit de elektrische veldsterkte; deze procedure geeft een zeer vergelijkbare som als hierboven.

Door de resultaten te substitueren, krijgen we dat de halveringstijd van de lading op de metalen bol is

$$T_{1/2} = \frac{1}{4\pi\sigma r_0} 4\pi\epsilon_0 r_0 \ln 2 = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \ln 2$$

Het is interessant om op te merken dat de halfwaardetijd niet afhangt van de grootte van de metalen bol. Deze wordt uitsluitend bepaald door de geleidbaarheid van lucht en een universele natuurkundige constante.

3 Gasmengselcondensatie (5 pt)

Bij $V > V_2$ (zie Figuur), is er een regulier gasmengsel (geen condensatie). Bij $V_1 < V < V_2$ condenseert een van de gassen.

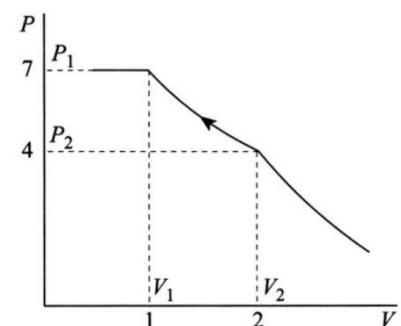
Wanneer het volume gelijk is aan of kleiner dan V_1 condenseren beide gassen, en verandert de druk niet. Laten we schrijven:

$$P_1 = P_0 + P_A$$

$$P_2 = P_0 + P_N$$

Waarbij P_N de partiële stikstofdruk is bij (V_2, P_2) , P_0 de verzadigde dampdruk van zuurstof is, en P_A de verzadigde dampdruk van stikstof bij $T = 77,4$ K is.

Tussen V_2 en V_1 is stikstof een gas, en aangezien de temperatuur constant is geldt



$$P_N = P_A \frac{V_1}{V_2}$$

Door (S.4.60.3) te gebruiken en te delen door vergelijking (S.4.60.1), krijgen we:

$$\frac{7}{4} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{P_0 + P_A}{P_0 + P_A V_1/V_2} = \frac{P_0 + P_A}{P_0 + P_A/2}$$

waaruit volgt:

$$P_0 = P_A/6 \approx 1,7 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Als we hadden aangenomen dat zuurstof condenseert bij (V_1, P_1) , zouden we $P_0 = 6P_A$ krijgen. Dit is in tegenspraak met het feit dat zuurstof bij een hogere temperatuur kookt. De verzadigde dampdruk bij $T = 77 \text{ K}$ zou lager moeten zijn dan P_A .

Om de massa zuurstof te vinden, gebruiken we de ideale gaswet bij de toestand (V_2, P_2) , waarbij de zuurstof net begint te condenseren (d.w.z. de druk is P_0 en alles is gas). Dus:

$$P_0 V_2 = \frac{m_0}{\mu_0} RT$$

Waarbij μ_0 de molaire massa van zuurstof is. Voor stikstof kan een vergelijkbare vergelijking worden opgesteld voor (V_1, P_1) :

$$P_A V_1 = \frac{m_N}{\mu_N} RT$$

Waarbij μ_N de molaire massa van stikstof is. Door te delen, krijgen we:

$$m_0 = \frac{P_0 \mu_0 V_2}{P_A \mu_A V_1} m_N = \frac{18}{67} 2m_N \approx \frac{8}{21} m_N \approx 38 \text{ g}$$

4 LED TV (5 pt)

- De kleuren ontstaan door diffractie – het patroon van de pixels van de televisie werkt als een diffractierooster, wat resulteert in meerdere diffractie-orde. De kleuren zijn niet gerelateerd aan de kleuren van de RGB-leds, omdat de televisie niet is ingeschakeld.
- De subpixelindeling in de afbeelding rechts bestaat uit trapeziums, waarvan de randen naar rechts hellen bij de helft van de pixels, en naar links bij de andere helft. Het herhalende patroon van de naar links hellende randen veroorzaakt het diagonale diffractiepatroon van linksonder naar rechtsboven, en omgekeerd voor de andere randen. De verticale strepen in het diffractiepatroon ontstaan door de horizontale randen (zwarte lijnen in de subpixelindeling).
- De lampen bevinden zich ongeveer 3 m van de tv, en de camera staat op ongeveer 1 m afstand van de tv. De afstand tussen de diffractie-orde is ongeveer 6 cm. Dit geeft een hoek van ongeveer $\theta = 1/150$. Met de formule $d \sin \theta = n\lambda$ en met $\lambda = 500 \text{ nm}$, vinden we $d = 150\lambda = 75 \mu\text{m}$. Drie subpixels samen zijn dan ongeveer $225 \mu\text{m}$, wat voor een 2k-, 4k- en 8k-televisie een horizontale afmeting zou geven van respectievelijk 45 cm, 90 cm of 180 cm. Een 4k-tv lijkt het meest realistisch.

5 RLC-circuit (5 pt)

- In het stationaire regime kunnen de condensatoren effectief worden losgekoppeld (ze geleiden geen gelijkstroom) en kunnen de spoelen worden vervangen door draden. Als de voltmeter ideaal is, loopt er dus geen stroom door R_1 en toont de voltmeter de spanning op R_2 gelijk aan ε .

- (b) Condensatoren kunnen hun spanning niet onmiddellijk veranderen en smoorspoelen kunnen hun stroom niet onmiddellijk veranderen. L_1 en L_2 hebben allebei alle stroom gedragen die door het circuit is gestroomd, daarom dragen ze na het openen van de schakelaar nog steeds een stroom van ε/R_2 en fungeren ze als stroombronnen. Omdat de stroom van L_2 ook door R_2 loopt, is de spanning op R_2 ε (met de “+”-kant in het midden van de schakeling). De stroom door L_1 loopt ook door R_1 (het is de stroom die C_1 oplaadt); daarom is de spanning op R_1 $\varepsilon R_1/R_2$ (met de “+”-kant in het midden). De aflezing van de voltmeter is van teken veranderd en is nu $\varepsilon(1 - R_1/R_2)$ of, als we de gegevens invoeren, -2ε .
- (c) Onmiddellijk na het openen van de schakelaar was condensator C_1 ongeladen (hij stond parallel aan R_1 die geen stroom voerde) en had C_2 een spanning van ε (hij stond direct parallel aan de batterij). L_1 en L_2 voerden beide een stroom van ε/R_2 . De voltmeter kan effectief worden losgekoppeld (zijn weerstand is enorm), waardoor we twee afzonderlijke circuits krijgen, $R_1 L_1 C_1$ en $R_2 L_2 C_2$. Daarom (met behulp van de potentiële energieformules $C U^2/2$ en $L I^2/2$ was de opgeslagen energie in het linker circuit $L_1 \varepsilon^2/(2R_2^2)$ of, met de gegeven gegevens, $L \varepsilon^2/(2R^2)$. Dit is de energie die uit R_1 verloren gaat. De corresponderende uitdrukkingen voor de rechter kring (die de energie geeft die uit R_2 verloren gaat) zijn

$$C_2 \varepsilon^2/2 + L_2 \varepsilon^2/(2R_2^2) \text{ en } C \varepsilon^2/2 + L \varepsilon^2/(2R^2).$$

6 Botsende raketten (5 pt)

- (a) In het aardstelsel geldt

$$t = \frac{l}{v_A + v_B} = \frac{b - a}{v_A + v_B} = \frac{4.2 \cdot 10^8 \text{ m}}{1.4 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1 \text{ s}$$

- (b) In het stelsel van A zijn de coördinaten van B gegeven door de Lorentz transformatie van het aardstelsel

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v_A \Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v_A}{c^2} \Delta x)$$

Dus in het stelsel van A nadert B met

$$\begin{aligned} v'_B &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v_A \Delta t)}{\gamma(\Delta t - v_A \Delta x/c^2)} \\ &= \frac{v_B - v_A}{1 - v_A v_B/c^2} = \frac{-0.6c - 0.8c}{1 - (0.8c)(-0.6c)/c^2} = -0.95c \end{aligned}$$

Het zelfde resultaat (met tegengesteld teken) krijg je in het stelsel van voor raket A

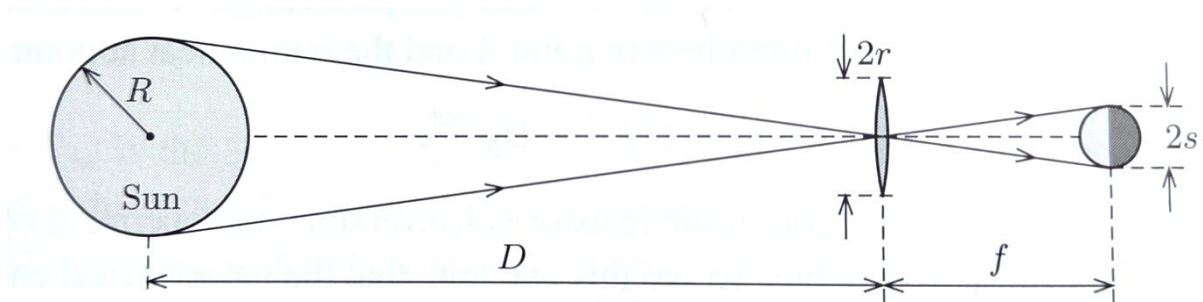
- (c) In beide raketstelsels is de tijd tot de botsing vertraagd met respect tot het stelsel van de aarde en dus

$$t_A = \frac{t}{\gamma_A} = 1 \cdot \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6 \text{ s}$$

$$t_B = \frac{t}{\gamma_B} = 1 \cdot \sqrt{1 - 0.6^2} = 0.8 \text{ s}$$

TOETS 2

7 Opgewarmde bol door de zon (5 pt)



De oppervlaktetemperatuur T_{zon} van de zon, haar straal R en de afstand tussen de zon en de aarde D zijn allemaal goed bekende gegevens. Noem de straal van de lens r en haar brandpuntsafstand f . De totale hoeveelheid energie die de zon per tijdseenheid uitzendt is:

$$L_{sun} = 4\pi R^2 \sigma T_{Sun}^4$$

met σ de Stefan-Boltzmann constante. Van dit uitgestraalde vermogen bereikt een fractie $\pi r^2 / 4\pi D^2$ de lens, en dus ontvangt het beeld van de zon dat door de lens wordt gevormd een totaal vermogen van:

$$P = \left(\frac{R}{D}\right)^2 \pi \sigma T_{Sun}^4 r^2$$

Uit geometrische overwegingen (zie figuur, die duidelijk niet op schaal is), is de straal s van het beeld van de zon:

$$s = \frac{R}{D} f$$

dus

$$P = \pi \left(\frac{rs}{f}\right)^2 \sigma T_{Sun}^4$$

Elk punt van het beeld had dezelfde helderheid, en dus is het stralingsvermogen dat op een eenheidsoppervlak van het beeld valt:

$$w = \left(\frac{rs}{f}\right)^2 \sigma T_{Sun}^4 = \frac{1}{16} \sigma T_{Sun}^4$$

Een object dat door dit vermogen wordt bestraald, zal opwarmen tot een eindtemperatuur T , zodanig dat het geabsorbeerde vermogen gelijk is aan het vermogen van de zwarte stralingsuitstoot, $A\sigma T^4$ dat door het object wordt uitgestraald. Aangezien dit laatste afhangt van het oppervlak A van het object, hangt de maximale temperatuur T af van de vorm van het object.

Als de straal van de bol in het probleem s is (dezelfde als de grootte van het beeld van de zon), dan is het geabsorbeerde vermogen nog steeds P , maar het uitgestraalde vermogen is $4\pi s^2 \sigma T^4$. Hieruit volgt dat

$$T = (1/64)^{\frac{1}{4}} T_{sun} \approx 2040 \text{ K}$$

8 Herhalende schakeling (5 pt)

- (a) Helemaal berekenen is erg veel werk.

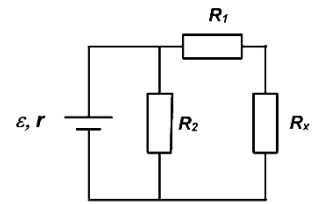
Eerst goed kijken. Vanaf rechts beginnen: De $R_1 = 5 \Omega$ en $R = 5 \Omega$ leveren samen 10Ω . Deze twee in serie staan samen parallel met de laatste R_2 van 10Ω . Dat is een vervangingsweerstand van 5Ω .

Dit kan 20 X herhaald worden. De vervangingsweerstand van de gehele schakeling is dus 5Ω . De stroom geleverd door de batterij is dus $I = \varepsilon/R = 10/5 = 2 \text{ A}$

Elke keer bij een splitsing wordt de stroom gehalveerd.

De stroom door de laatste lus (en dus door de weerstand R) is dus

$$I = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 1,9 \mu\text{A}$$



- (b) Door de 'extra' weerstand van 5Ω zal de stroom uit de batterij nu niet 2 A slecht 1 A zijn. Een extra halvering dus. Dus $I = 0,95 \mu\text{A}$.

9 Een overlevingsmanoeuvre (5 pt)

- (a) De snelheid Van de Nostromo langs het cirkelvormige pad: $V_0^2 = PG/R$

- (b) De snelheid van de Alien komt uit de energievoorwaarde $E > 0$:

$$V_A^2 > \frac{2PG}{R}$$

- (c) De snelheid van de Nostromo na het uitwerpen van de alien en vlak voor de landing voldoet aan het behoud van impulsmoment en energie.:

$$\frac{V_N^2}{2} - \frac{PG}{R} = \frac{V_N^2}{2} \cdot \frac{R^2}{r^2} - \frac{PG}{r} \rightarrow V_N^2 = \frac{2PG}{R} \cdot \frac{r}{R+r}$$

- (d) Wanneer de alien wordt uitgestoten, blijft het momentum behouden:

$$(M+m)V_0 = mV_A \pm MV_N$$

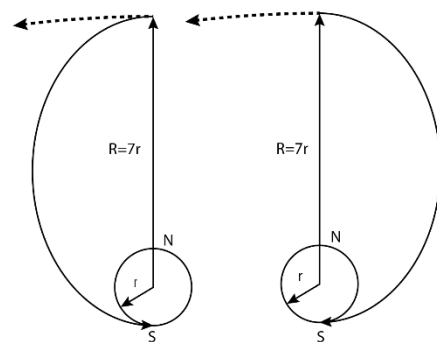
$$\frac{m}{M+m} = \frac{V_0 \mp V_N}{V_A \mp V_N}$$

Scenario 1 komt overeen met “-“ in de vergelijking:

$$\frac{m}{M+m} < \frac{1 - \sqrt{2r/(R+r)}}{\sqrt{2} - \sqrt{2r/(R+r)}} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1} = 0.55$$

Scenario 2 komt overeen met “+“ in de vergelijking:

$$\frac{m}{M+m} < \frac{1 + \sqrt{2r/(R+r)}}{\sqrt{2} + \sqrt{2r/(R+r)}} = \frac{3}{2\sqrt{2} + 1} = 0.78$$



10 IJsthee (5 pt)

Als de beginmassa van het water in het glas gelijk is aan de massa van M stukken ijs, en de warmte die nodig is om een stuk ijs te smelten en op te warmen tot T_0 gelijk is aan de warmte die nodig is om de temperatuur van een gelijke massa water met λ te verhogen.

$$n \lambda = (M + n) \sum_{k=1}^n \Delta T_k$$

Uit de vergelijkingen voor ΔT_1 en ΔT_2 kunnen we afleiden: $\lambda = (M + 1)\Delta T_1$

$$2\lambda = (M + 2)(\Delta T_1 + \Delta T_2)$$

en

$$M = \frac{2\Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = 48$$
$$\lambda = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2} \Delta t_1 = 245$$

dan

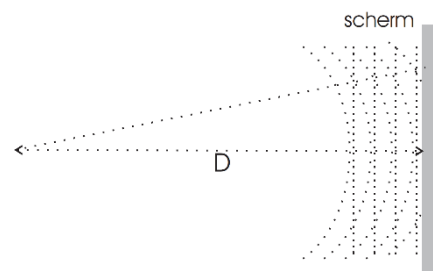
$$\Delta T_3 = \frac{3\lambda}{M + 3} - \Delta T_1 - \Delta T_2 = \frac{3\Delta T_1(\Delta T_1 + \Delta T_2)}{3\Delta T_1 - \Delta T_2} = 4,61$$

Voor de uiteindelijke afkoeling naar 0:

$$n\lambda = (M + n)T_0$$
$$n = \frac{MT_0}{\lambda - T_0} = 28$$

11 MZ interferometer (5 pt)

- (a) De lens focuseert de bundel op een afstand van 5 cm achter de lens. Het cirkelvormige patroon ontstaat door interferentie tussen een bolvormige golf, met middelpunt op een afstand van $D=10$ cm van het scherm, en een vlakke golf. In het figuur hieronder is de situatie geschetst, de stippellijnen geven de fasefronten weer. Maxima ontstaan als het weglengte verschil een geheel aantal keren de golflengte is; vanwege de symmetrie zijn deze maxima cirkelvormig.



- (b) Voor het centrum van het patroon geldt kennelijk dat het weglengteverschil $(m+1/2)\lambda$ is. Het eerste maximum ontstaat als het weglengte verschil $(m+1)\lambda$ is. Er moet dan gelden:

$$\sqrt{D^2 + r_1^2} - D = \lambda/2 \rightarrow D + \frac{r_1^2}{2D} - D \approx \lambda/2 \rightarrow r_1 \approx \sqrt{\lambda D} = 0,25 \text{ mm}$$

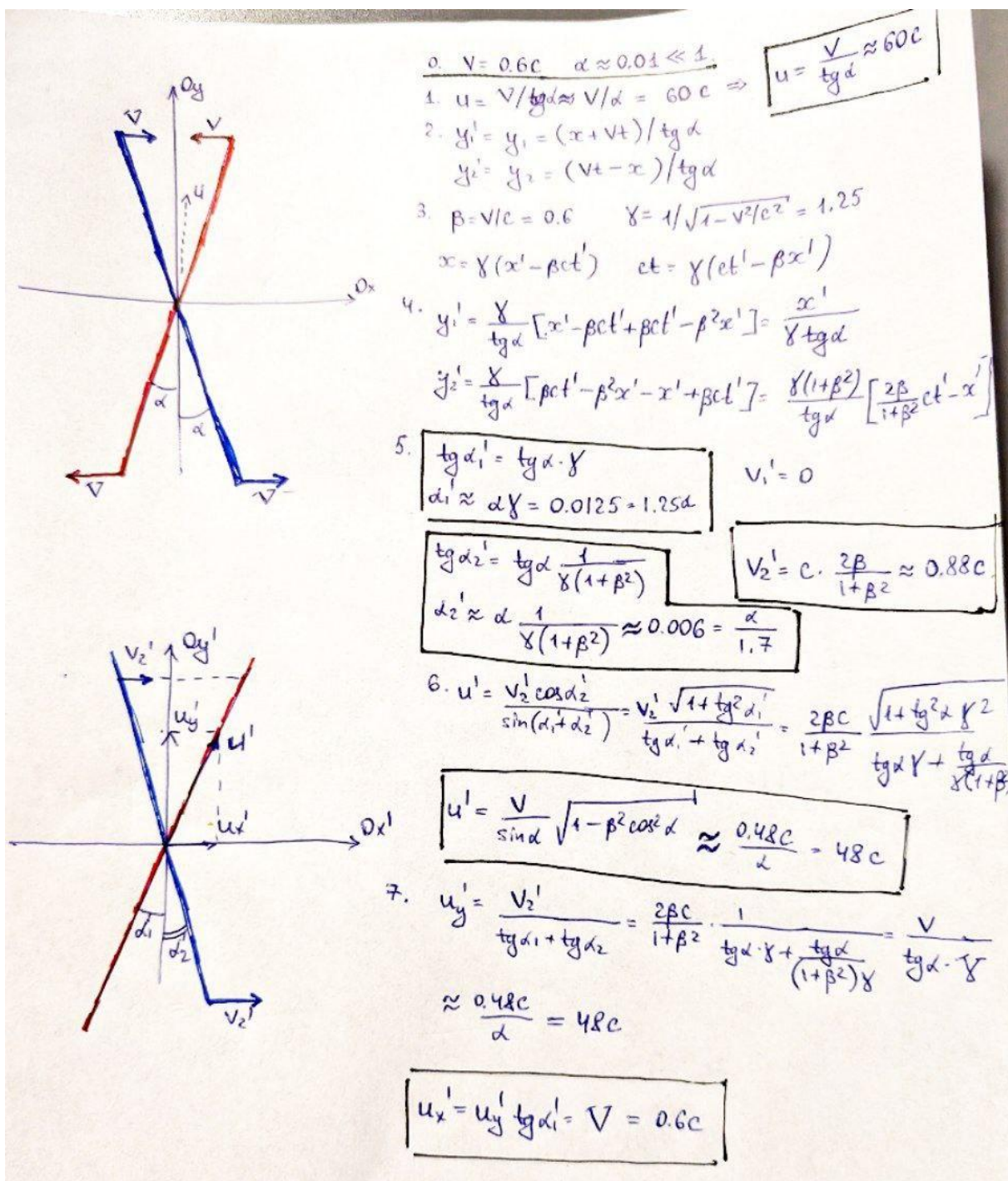
$$\text{En: } \sqrt{D^2 + r_2^2} - D = 3\lambda/2 \rightarrow r_2 \approx \sqrt{3\lambda D} = 0,44 \text{ mm}$$

- (c) Bij een kleine indextoename van gas in de glazen buis worden de vlakke golven (zie bovenstaand figuur) vertraagd; de verticale stippellijnen in de figuur schuiven iets naar links: het patroon 'loopt' naar buiten. Aangezien bij bovengenoemde toevoeging van gas X de ringen naar binnen lopen hebben we te maken met een indexverlaging. Er geldt:

$$\Delta n L / \lambda = -41,1 \rightarrow \Delta n = -260 \cdot 10^{-6} \rightarrow n_x = 1,000034$$

Dit komt overeen met Helium.

12 Twee snelle latjes (5 pt)



Interessant is dat de stilstaande lat een grotere hoek maakt met de verticale as en de bewegende lat een kleinere hoek met de verticale as.

Dan zal het snijpunt langs de rustende lat bewegen met een snelheid van $u' = 48c$.

Interessant genoeg is de horizontale projectie van deze snelheid precies de beginsnelheid van een lat in het oorspronkelijke referentiesysteem ($u'_x = V = 0,6c$)