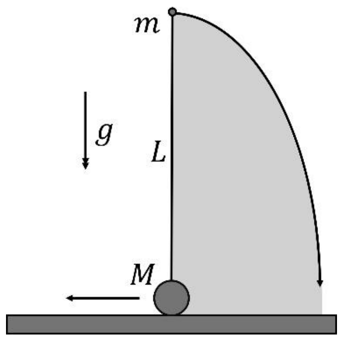
Natuurkunde Olympiade 2025 Toets tweede ronde, uitwerkingen

1 Een halter



(a) Omdat het horizontale impuls behouden blijft, is M bewegingsloos wanneer m de vloer raakt. De wet van behoud van energie geeft:

$$\frac{mV^2}{2} = mgL \rightarrow V^2 = 2gL$$

(b) Als de snelheid maximaal is, is de versnelling nul, dus ook de kracht $F = 0\ \mathrm{N}$.

(c) Het CM kan niet langs de horizontale as bewegen, dus als de (horizontale) coördinaat van m gelijk is aan $+x$, is de coördinaat van M gelijk aan $-xm/M$. De horizontale afstand tussen m en M is dan dus:

$$x + x\frac{m}{M} = x\frac{M+m}{M}$$

Als y de verticale positie van de massa m is, dan moet dus met de SvP gelden:

$$y^2 + \left(x\frac{M+m}{M}\right)^2 = L^2$$

Dit is de vergelijking van een ellips. De baan is dus een kwart ellips met oppervlakte:

$$S = \frac{\pi L^2 M}{4(M+m)}$$

2 Geladen bollen

(a) Na het sluiten van schakelaar K1 verandert de totale lading in het systeem niet, dus de ladingen op de bollen zijn gelijk in grootte en tegengesteld in teken. De potentiaal op de bol met straal $2r$ is de helft van de potentiaal op de bol met straal r, en het potentiaalverschil tussen beide is U_b. De potentiëlen van de bollen zijn dus $2U_b/3$ en $-U_b/3$.

(b) De potentiaal bij het bovenste contact van de onderste weerstand is het rekenkundig gemiddelde van de potentiaal van de twee bollen en aarde. Dit volgt uit het feit dat alle drie de weerstanden identiek zijn en dat de som van de stromen die erin gaan gelijk moet zijn aan de som van de stromen die eruit gaan. Daarom is op het beginmoment, wanneer de ladingen op de bollen nog niet veranderd zijn, $U = (2U_b/3 + -U_b/3 + 0)/3 = U_b/9$.

(c) Nadat het evenwicht is bereikt, blijven de ladingen op de bollen onveranderd, wat betekent dat de stroom die het systeem binnenkomt door de onderste weerstand nul is. Als gevolg hiervan stroomt de stroom door de andere twee weerstanden zonder dat de grootte of richting verandert. Hieruit volgt dat de potentialen van de bollen $U_b/2$ en $-U_b/2$ zullen zijn.

(d) De lading die door de onderste weerstand is gegaan is gelijk aan de verandering in lading in het systeem:

$$Q = C_r\left(\frac{U_b}{2} - \frac{2U_b}{3}\right) + C_{2r}\left(-\frac{U_b}{2} + \frac{U_b}{3}\right)$$

Capaciteiten van de bollen:

$$C_r = 4\pi\epsilon_0 r = \alpha r, \quad C_{2r} = 8\pi\epsilon_0 r = 2\alpha r, \quad \alpha = 4\pi\epsilon_0$$

$$Q = \alpha r\left(\frac{U_b}{2} - \frac{2U_b}{3}\right) + 2\alpha r\left(-\frac{U_b}{2} + \frac{U_b}{3}\right) = \alpha r U_b\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{\alpha r U_b}{2} = -2\pi\epsilon_0 U_b r$$

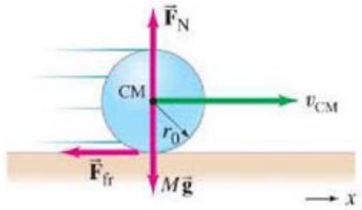
Het is eenvoudig aan te tonen dat de spanning over de onderste weerstand lineair verandert met de lading die er doorheen gaat. De warmte die wordt afgevoerd in de weerstand wordt gegeven door het oppervlak onder de grafiek van de lineaire afhankelijkheid $U(Q)$. Dus:

$$W = \frac{1}{2}\cdot\frac{U_b}{9}\cdot 2\pi\epsilon_0 U_b r = \frac{\pi\epsilon_0}{9}{U_b}^2 r$$

3 Bowlingbal

Newton's tweede wet geeft

$$Ma_x = \sum F_x = -F_w = -\mu_k F_n = -\mu_k Mg$$



Met μ_k de wrijvingscoëfficiënt bij beweging, want de bal glijdt, dus $a_x = -\mu_k g$.

De snelheid van het massamiddelpunt CM is

$$v_{CM} = v_0 + a_x t = v_0 - \mu_k gt$$

Pas vervolgens de tweede wet van Newton toe voor rotatie om de CM: $I_{CM}\alpha_{CM} = \Sigma\tau_{CM}$:

$$\frac{2}{5}Mr_0^2\alpha_{CM} = F_{wr}r_0 = \mu_k Mgr_0$$

De hoekversnelling is dus constant met $\alpha_{CM} = 5\mu_k g/2r_0$

Voor de hoeksnelheid van de bal geldt dan:

$$\omega_{CM} = \omega_0 + \alpha_{CM}t = 0 + \frac{5\mu_k gt}{2r_0}$$

De bal begint gelijk met rollen als deze de grond raakt maar deze zal eerst slippen en rollen. Voor rollen zonder slippen moet gelden:

$$v_{CM} = \omega_{CM}r_0$$

Het rollen zonder slippen begint op t_1 als $v_{CM} = \omega_{CM}r_0$.

Invullen van de snelheden levert:

$$v_0 - \mu_k gt_1 = \frac{5\mu_k gt_1}{2r_0}r_o$$

Dus:

$$t_1 = \frac{2v_0}{7\mu_k g}$$

4 Circuit in magnetisch veld

(a) De wetten van Kirchhoff zeggen dat de som van de spanningsvallen in de lus nul is. Dit betekent dat:

$$IR + V_{ba} + V_{ind} = 0$$

Met IR de spanning over de weerstand, V_{ba} de spanning over de condensator en V_{ind} de inductiespanning door het magnetisch veld.

De stroom in de lus is de afgeleide van de lading op de condensator.

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[CV_0\left(1 - e^{-2t/\tau}\right)\right] = -\frac{2CV_0}{\tau}e^{-2t/\tau}$$

De lus kunnen we zien als een spoel met 1 winding. Aangezien de oppervlakte binnen de lus constant is, is de tijdsafgeleide van de flux gelijk aan de afgeleide van het magnetisch veld vermenigvuldigd met de oppervlakte van de lus. Er geldt dus het volgende:

$$\pi r^2\frac{dB}{dt} = A\frac{dB}{dt} = \frac{d\Phi_B}{dt} = -\mathrm{V_{ind}} = \mathrm{IR} + \mathrm{V_{ba}} = -\frac{2CV_0R}{\tau}e^{-2t/\tau} + \mathrm{V_0}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-2t}{\tau}}\right)$$

$$= \mathrm{V_0}\left(1 - \left(1 + \frac{2\mathrm{CR}}{\tau}\right)\mathrm{e}^{\frac{-2t}{\tau}}\right)$$

We concluderen dat:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{V_0}{\pi r^2}\left(1 - \left(1 + \frac{2\mathrm{CR}}{\tau}\right)\mathrm{e}^{\frac{-2t}{\tau}}\right)$$

(b) Omdat de lading zich opbouwt op de bovenste plaat van de condensator, gaat de geïnduceerde stroom met de klok mee. Volgens de wet van Lenz produceert dit een neerwaartse flux, dus het externe neerwaartse magnetische veld moet afnemen.

5 Zeepbel

(a) Het maximale faseverschil ontstaat bij loodrechte inval.

Het faseverschil is dan: $\phi = \frac{1}{2} + \frac{2D}{\lambda}$

Heldere vlek: $\phi = 1$ [1]

Met de golflengte $\lambda = 580$ nm volgt $D = \frac{\lambda}{4} = 145$ nm

(b) Als het faseverschil ϕ_1 is bij de hoek α_1 dan geldt:

$\frac{\lambda}{2D}\phi_1 = 1 - 0{,}5\alpha_1^2$

Dan geldt bij de hoek α_2 $\frac{\lambda}{2D}(\phi_1 - 1) = 1 - 0{,}5\alpha_2^2$

zodat $0{,}5(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) = \frac{\lambda}{2D}$

invullen levert $D = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ m $= 0{,}18$ mm

(c) Bij breking geldt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$:

De afgelegde weg door het zeepvlies is:

$$\frac{2D}{\cos\beta} = \frac{2D}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{2D}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}}$$

de afgelegde weg van de rechtstreeks teruggekaatste lichtstraal na interferentie met de gebroken lichtstraal is:

$$2D\tan\beta \cdot \sin\alpha = \frac{2D}{\cos\beta} \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha = \frac{2D}{\cos\theta}\frac{\sin^2\alpha}{n}$$

Het weglengteverschil is daardoor:

$$\frac{2D}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{n}\right) = \lambda \cdot \phi$$

B1 Biljarten

Stel bal 1 botst met een snelheid v tegen bal 2 aan. Bal 1 had voor de botsing enkel snelheid in de x richting. De snelheid u_{2y} die de bal 2 na de botsing in de $+y$ richting heeft, heeft vanwege impulsbehoud bal 1 eenzelfde snelheid u_{2y} in de $-y$ richting.

Verder geldt ook vanwege impulsbehoud in de x-richting dat de als de bal 2 na de botsing een snelheid u_{2x} heeft, de snelheid van bal 1 dan $v - u_{2x}$ is.

Voor de grootte van snelheid u_2 van bal 2 geldt dus:

$$u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2}$$

En voor bal 1:

$$u_1 = \sqrt{(v - u_{2x})^2 + u_{2y}^2}$$

Nu energiebehoud. Er moet dus gelden:

$$v^2 = u_{2x}^2 + u_{2y}^2 + (v - u_{2x})^2 + u_{2y}^2$$

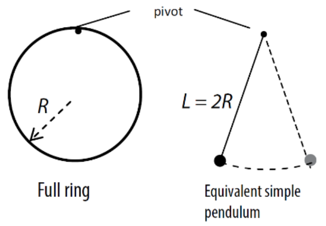
Maar dit is de Stelling van Pythagoras voor een (rechthoekige) driehoek met hypotenusa v en zijden u_2 en u_1. Dat kan alleen als deze loodrecht op elkaar staan.

6 Hoepel

(a) Met de stelling van Steiner: $I_P = I_{c.m.} + mh^2$
en de formule voor de trillingstijd van een fysische slinger

$$P_{PhyPend} = 2\pi\sqrt{\frac{I_P}{mgh}}$$

In beide formules is I_P het traagheidsmoment van de slinger om het draaipunt en h de afstand tussen het draaipunt en het massamiddelpunt van de slinger.
Voor de volledige ring is het massamiddelpunt ook het middelpunt van de kromming en dus is $h = R$, de straal van de ring. Het bewijs is bijna triviaal

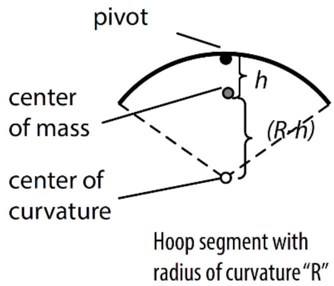


$$I_P = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

Substitueer in formule voor de trillingstijd:

$$T_{fullring} = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

(b) Voor het hoepelsegment ligt het massamiddelpunt niet in het krommingsmiddelpunt, maar deze twee punten zijn gescheiden door een afstand $d = (R - h)$(zie fig.). We gebruiken de stelling van Steiner om uitdrukkingen te bepalen voor de traagheidsmomenten van de slinger om zowel het draaipunt (I_p) als het krommingsmiddelpunt (I_0) in de onderstaande formules.



$$I_P = I_{c.m.} + mh^2$$

en

$$I_0 = I_{c.m.} + m(R - h)^2 = I_{c.m.} + m(R^2 - 2Rh + h^2)$$

Combineer de twee uitdrukkingen,

$$I_P = I_0 - mR^2 + m2Rh$$

Omdat elk punt in het hoepelsegment een afstand R van het kromtemiddelpunt af ligt, is $I_0 = mR^2$ en daarom $I_P = m2Rh$.

Tenslotte substitueren we in de periodeformule $T_{ring-segment} = 2\pi\sqrt{\frac{2mRh}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

En de equivalente slingerlengte is weer $L = 2R$

7 Stoute boer

(a) De sinusvormige stroom in de elektriciteitsleiding creëert een sinusvormig variërend magnetisch veld dat de elektriciteitsleiding omcirkelt. We integreren dit veld over het oppervlak van de rechthoek om de flux er doorheen te bepalen. Differentiëren van de flux geeft de emf rond de rechthoek. Door de maximale emf gelijk te stellen aan 325 V, de benodigde lengte van de rechthoek bepalen.

$$B(t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} cos(2\pi f t) \quad ;$$

$$\Phi_B(t) = \int B dA = \int_{5.0\text{ m}}^{7.0\text{ m}} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} cos(2\pi f t)\, l dr = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} l\, cos(2\pi f t) \int_{5{,}0\text{ m}}^{7{,}0\text{ m}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln(1.4) l\, cos(2\pi f t)$$

$$e = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{N\mu_0 I_0}{2\pi}\ln(1.4) l \left[\frac{d}{dt} cos(2\pi f t)\right] = N\mu_0 I_0 f \ln(1.4) l\, sin(2\pi f t)$$

$$e_0 = N\mu_0 I_0 f \ln(1{,}4) l \;\rightarrow\; l = \frac{e_0}{N\mu_0 I_0 f \ln(1{,}4)} = \frac{325V}{100(4\pi \times 10^{-7})(55000)(50)\ln(1{,}4)} = \boxed{2{,}75\text{ m}}$$

(b) Dit is onethisch omdat de stroom in de rechthoek een tegen-emf creëert in de oorspronkelijke draad. Dit resulteert in een stroomverlies voor het elektriciteitsbedrijf, net alsof de draad fysiek op de lijn was aangesloten.

8 Perpetuum mobile

(a) De twee rails oefenen beide een schuine kracht omhoog op het balletje. Deze twee krachten samen zijn even groot maar tegengesteld aan de zwaartekracht. De hoek α met de horizontaal is dus $\cos^{-1}(0{,}4) = 66{,}4°$.
De beide verticale componenten zijn samen even groot als de zwaartekracht:

$$2F \sin\alpha = mg$$

Hieruit volgt: $F = 19 \text{ mN}$

(b) In O heeft de bal geen energie als we het nulpunt van de hoogte energie daar 0 kiezen. In punt d heeft de bal dan enkel kinetische energie. Die kinetische energie heeft de bal ook als deze terecht komt in de opvangbak. Daar wordt de energie omgezet in warmte zodat de bal weer zonder energie in punt O kan beginnen aan een nieuw rondje. Als we dus weten wat de totale energie in punt d is, weten we ook hoeveel arbeid er verricht moet worden.
Omdat we de massa van de bal weten is het berekenen van de snelheid de nieuwe opdracht. Omdat dit een schuine worp is onder hoek van 53° met een horizontale afstand van $s = 15 \text{ cm}$ is de snelheid uit te rekenen.
De snelheid v heeft een horizontale en een verticale component: $v_x = v\cos\alpha$ en $v_y = v\sin\alpha$.
Stel dat de vluchttijd t is. Dan volgt horizontaal:

$$t = \frac{0{,}15}{v_x} = \frac{0{,}15}{v\cos\alpha}$$

En verticaal (neem traject van hoogste punt naar O):

$$h = \tfrac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{8}gt^2 = \frac{v_y}{2}\frac{t}{2} = \tfrac{1}{4}v\sin\alpha\, t$$

Hieruit halen we:

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}$$

Door deze aan elkaar gelijk te stellen volgt:

$$\frac{0{,}15}{v\cos\alpha} = \frac{2v\sin\alpha}{g}$$

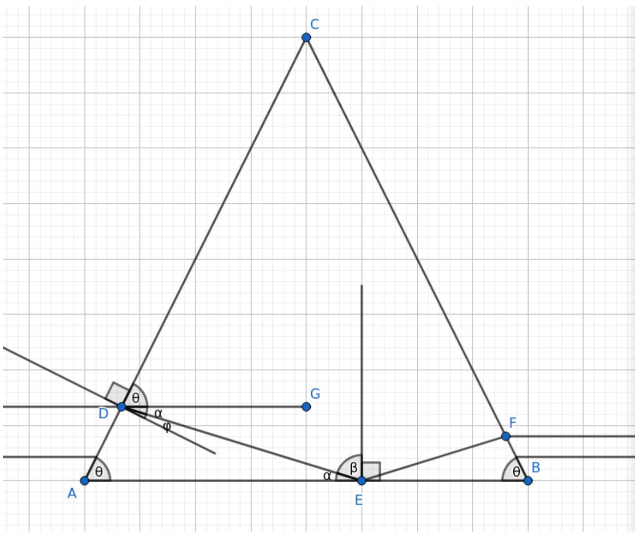
$$v^2 = \frac{0{,}15g}{2\sin\alpha\cos\alpha} = 1{,}56$$

De kinetische energie is dus de gevraagde arbeid:

$$W = E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = 2{,}8 \text{ mJ}$$

9 Prisma in water

Zie de tekening in de figuur. Trek de inkomende lichtstraal door tot een punt *G* en teken loodlijn in de punten *D* en *E* op het prisma. Definieer ϕ als de hoek van breking en β als de hoek van reflectie.



Rechte hoeken bij *D* en *E* geven respectievelijk de volgende twee vergelijkingen.

$\theta + \alpha + \phi = \frac{1}{2}\pi$ (1)

$\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ (2)

Aftrekken van deze vergelijking elimineert α en geeft de vergelijking

$\theta + \phi = \beta.$ (3)

Voor totale reflectie in *E* moet β minimaal de grenshoek zijn. Gebruikmakend van de brekingsindices van water en glas volgt dat de minimale hoek β gegeven is door

$sin(\beta_{min}) = \frac{n_w}{n_g} = \frac{8}{9} \rightarrow \beta \approx 62.73^\circ$ (4)

Met de brekingswet voor licht in het punt *D* weten we dat

$ng = \frac{sin\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right)}{sin(\phi)} = \frac{cos(\theta)}{sin(\phi)}$ (5)

We berekenen de minimale hoek θ:

$$\sin(\beta_{min}) = \frac{n_w}{n_g}$$

$$\sin(\theta_{min} + \phi_{min}) = \frac{n_w}{n_g}$$

$$\sin(\theta_{min})\cos(\phi_{min}) + \cos(\theta_{min})\sin(\phi_{min}) = \frac{n_w}{n_g}$$

$$\sin(\theta_{min})\cos(\phi_{min}) = \frac{n_w}{n_g} - \cos(\theta_{min})\sin(\phi_{min})$$

$$\sin^2(\theta_{min})\cos^2(\phi_{min}) = \left(\frac{n_w}{n_g} - \cos(\theta_{min})\sin(\phi_{min})\right)^2$$

$$(1 - cos^2(\theta_{min}))(1 - sin^2(\phi_{min})) = \left(\frac{n_w}{n_g} - \cos(\theta_{min})\sin(\phi_{min})\right)^2$$

Maak gebruik van vergelijking (5).

$$(1 - \cos^2(\theta_{min}))\left(1 - \frac{\cos^2(\theta_{min})}{n_g^2}\right) = \left(\frac{n_w}{n_g} - \frac{\cos^2(\theta_{min})}{n_g}\right)^2$$

$$1 - \cos^2(\theta_{min}) - \frac{\cos^2(\theta_{min})}{n_g^2} + \frac{\cos^4(\theta_{min})}{n_g^2} = \frac{n_w^2}{n_g^2} + \frac{\cos^4(\theta_{min})}{n_g^2} - 2\frac{n_w}{n_g}\frac{\cos^2(\theta_{min})}{n_g}$$

$$1 - \cos^2(\theta_{min}) - \frac{\cos^2(\theta_{min})}{n_g^2} = \frac{n_w^2}{n_g^2} - \frac{2n_w\cos^2(\theta_{min})}{n_g^2}$$

$$n_g^2 - n_w^2 = \left(n_g^2 - 2n_w + 1\right)\cos^2(\theta_{min})$$

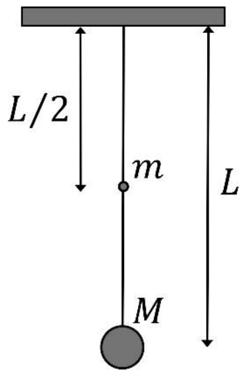
$$\cos(\theta_{min}) = \sqrt{\frac{n_g^2 - n_w^2}{n_g^2 - 2n_w + 1}}$$

Invullen van numerieke waardes geeft

$$\Theta_{min} \approx 25.88^\circ$$

10 Slingeren

(a) De spankracht in de draden is afkomstig van de zwaartekracht op de massa's. Aangezien $M \gg m$ nemen we aan dat de massa M stil blijft hangen precies onder het ophangingspunt. Stel dat de uitwijking van m uit de evenwichtsstand x is en laat θ de hoek van het (bovenste). De spankracht in de onderste draad is nu



$$F_{\text{onder}} = \frac{Mg}{\cos\theta}$$

In de bovenste draad is de spankracht:

$$F_{boven} = \frac{F_{\text{onder}} \cos \theta + mg}{\cos \theta} = \frac{(M+m)g}{\cos \theta}$$

De horizontale componenten van de spankrachten samen geven de horizontale kracht op de massa m.

$$F = (F_{onder} + F_{boven}) \sin \theta = \frac{(2M+m)g}{\cos \theta} \sin \theta \approx (2M+m)g\backslash fraxxL/2 = \frac{2(2M+m)g}{L} x$$
$$\approx \frac{4Mg}{L} x$$

De bewegingsvergelijking voor de kleine massa m is dan:

$$m\ddot{x} = -\frac{2(2M+m)g}{L} x$$

Dit is de vergelijking van een harmonische trilling. De periode is gegeven door:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{2(2M+m)g}} \approx \pi \sqrt{\frac{mL}{Mg}}$$

(b) Het systeem kan nu opgevat worden als twee slingers, met dezelfde lengte $L/2$, Waarvan de ene onder de andere hangt. Omdat de trilling van een (mathematische) slinger onafhankelijk is van de massa, hebben beide slingers dezelfde slingertijd:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

De bovenste, zware slinger drijft de onderste aan met precies zijn eigen frequentie. De onderste komt dus in resonantie. Zonder wrijving zal de onderste slinger dus explosief toenemen ten koste van de energie en dus uitwijking van de bovenste slinger.
Bij een precieze uitwerking van het systeem (zonder wrijving) volgt met α de hoek die de bovenste slinger maakt met de verticaal, β de hoek die de onderste slinger maakt met de verticaal en μ de verhouding M/m

$$\ddot{\alpha} + \ddot{\beta} = -\frac{2g}{L} \cdot \alpha$$

en

$$\ddot{\alpha} + \frac{M}{m+M} \ddot{\beta} = -\frac{2g}{L} \cdot \beta$$

dus

$$\ddot{\beta} = \frac{2g}{L}(1+\mu) \cdot \alpha - \frac{2g}{L}(1+\mu) \cdot \beta$$

en

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2g}{L}(1+\mu) \cdot \alpha + \frac{2g}{L} \mu \cdot \beta$$

Als $\mu \gg 1$, eerste geval, dan volgt:

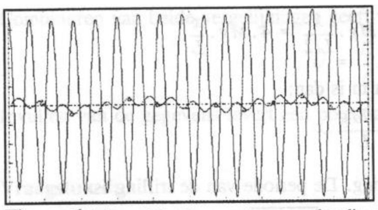
$$\ddot{\alpha} \approx -\ddot{\beta} \rightarrow \alpha \approx -\beta \rightarrow (\alpha + \beta) \approx 0 \text{ en } \ddot{\alpha} = -2\mu \frac{g}{L} \alpha$$

Dit houdt in dat M min of meer op zijn plaats blijft en m met de boven berekende frequentie slingert.

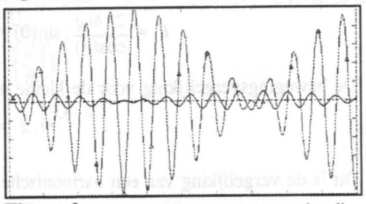
Als $\mu \ll 1$, tweede geval, dan volgt:

$$\ddot{\alpha} \approx -\frac{g}{L} \cdot \alpha \text{ en } \ddot{\beta} + \frac{g}{L} \cdot \beta \approx \frac{g}{L}\, \alpha$$

De bovenste slinger voert dan een harmonische beweging uit, terwijl de onderste de beweging uitvoert van een aangedreven harmonische slinger. De aandrijffrequentie is dezelfde als de resonantiefrequentie. Het verschijnsel van energieoverdracht is goed te zien.



Figuur 1 Gekoppelde slinger met massaverhouding



Figuur 2 Gekoppelde slinger met massaverhouding M/m = 0,01.

B2 Gloeilampontwerp

Voor de draad geldt:

$$R = \rho \frac{4L}{\pi D^2}$$

Voor het opgenomen vermogen P geldt dus:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2}{\rho} \frac{\pi D^2}{4L}$$

Omdat V en ρ constant zijn, volgt:

$$P \propto \frac{D^2}{L}$$

Omdat het uitgestraalde vermogen per oppervlakte-eenheid hetzelfde is, geldt:

$$P \propto A \propto DL$$

Er is evenwicht dus het opgenomen en uitgestraalde vermogen zijn gelijk. Dus;

$$\frac{D^2}{L} \propto DL$$

Oftewel: $D \propto L^2$

Dit kan ingevuld worden $P \propto L^3$ en $P \propto D^{1,5}$.

Als de ene gloeilamp 25 W is en de andere 200 W dan volgt:

$$\frac{P_{200}}{P_{25}} = \frac{8}{1} = \frac{L_{200}^3}{L_{25}^3} = \frac{D_{200}^{1,5}}{D_{25}^{1,5}}$$

Hieruit volgt dat $L_{200}/L_{25} = 2$ en $D_{200}/D_{25} = 4$.