Natuurkunde Olympiade 2024 Eindronde

Uitwerking theorietoets

1 **Dropzak** (Russian Physics Olympiade, final stage 2012)

De massa van de zak drop is de uiteindelijke uitslag: $m = m_0 = 2\ \mathrm{kg}$

De snelheid van de zak vlak voor de botsing is:

$$v = \sqrt{2gh}$$

De botsing is volledig inelastisch dus met impulsbehoud is de snelheid na de botsing:

$$V = \frac{m_0}{m_0 + M} v$$

De uitrekking van de veer van de weegschaal voordat de zak er op valt was:

$$x_1 = \frac{Mg}{k}$$

De maximale uitrekking van de veer is:

$$x_2 = \frac{Mg}{k} + \frac{m_1 g}{k} = \frac{(M + m_1)g}{k}$$

Energiebehoud tussen moment vlak na de botsing en maximale uitwijking:

$$\frac{(M + m_0)V^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} - (M + m_0)g(x_2 - x_1)$$

Combineren van formules:

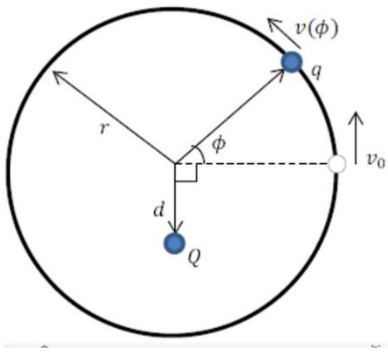
$$\frac{m_0^2 v^2}{2(M + m_0)} + \frac{M^2 g^2}{2k} = \frac{(M + m_1)^2 g^2}{2k} - (M + m_0)g\frac{m_1 g}{k}$$

Vereenvoudigen:

$$\frac{m_0^2 v^2}{2(M + m_0)} = \frac{m_1 g^2}{k}(m_1 - 2m_0)$$

Invullen van de snelheid v:

$$M = \frac{2km_0^2 h}{m_1 g(m_1 - 2m_0)} - m_0 = 2\ \mathrm{kg}$$



2 **Lading op een ring**

(a) Snelheid. Energiebehoud geeft:

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}v^2 + \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{Qq}}{\epsilon_0 \cdot |r - r_Q|} = \text{constant}$$

Invullen voor $v(0)$ en voor $v(\phi)$ levert:

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}v_0^2 + \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{Qq}}{\epsilon_{0\sqrt{\mathrm{r}^2+\mathrm{d}^2}}} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}(\phi)^2 + \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{Qq}}{\sqrt{\mathrm{r}^2 + \mathrm{d}^2 + 2\mathrm{rd}\sin\phi}}$$

Nu $v(\phi)$ vrijmaken, dan geldt:

$$\mathrm{v}(\phi) = \sqrt{v_0^2 + \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 m}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\sin\phi}}\right)}$$

(b) De ring geeft een normaalkracht F_n en zorgt met de andere krachten dat er een middelpuntzoekende kracht is $F_c = mv^2/r$.
De andere kracht is de coulombkracht:

$$F_Q = \frac{mC}{2(r^2 + d^2 + 2rd\, sin\, \phi)}$$

De loodrechte component op de baan heeft een component met $cos\, \alpha$. Met α de hoek tussen de lijn door Qq en de lijn loodrecht op de baan. Voor die cosinus geldt:

$$cos\, \alpha = \frac{r + d\, sin\, \phi}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\, sin\, \phi}}$$

Daarmee wordt $F_n = F_c + F_Q\, cos\, \alpha$
Dus

$$F_n = \frac{mv^2}{r} + \frac{mC(r + d\, sin\, \phi)}{2(r^2 + d^2 + 2rd\, sin(\phi\})^{3/2}}$$

(c) Bij stilstand is de wrijving nul, dus moeten de andere krachten in balans zijn. De kracht langs de ring moet nul zijn, dus boven en onder. Bij afstoten is dat dan boven en bij aantrekken onder voor een stabiele rustplek.

3 Licht

(a) De eerste orde maxima van de twee spleten ligt op $1{,}53\ \mathrm{mm}$.
Dus geldt:

$$\frac{\lambda}{d} = sin\, \alpha \cong tan\, \alpha = \frac{x}{l}$$

En

$$d = \frac{l\lambda}{x} = \frac{2{,}50 \cdot 632{,}8 \cdot 10^{-9}}{1{,}53 \cdot 10^{-3}} = 1{,}03 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

(b) De zevende orde stip mist omdat het eerste orde minimum van een spleet op dezelfde plek zit als de 7e orde stip. Voor één spleet geldt voor het eerste minimum dat

$$d\, sin\, \alpha = \lambda$$

$$\frac{\lambda}{d} = sin\, \alpha \cong tan\, \alpha = \frac{x}{l}$$

$$d = \frac{l\lambda}{x} = \frac{2{,}50 \cdot 632{,}8 \cdot 10^{-9}}{7 \cdot 1{,}53 \cdot 10^{-3}} = 1{,}48 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

4 Water in vacuum (Guide to physicsproblems 2 4.11)

(a) Omdat de verdamping zeer snel gaat, kan de verdampingswarmte alleen worden verkregen uit de smeltwarmte. Daarom, als water vast wordt en verdampt, kunnen we schrijven

$$m_i q_i = m_v q_v$$

Aangezien de totale massa $m = m_i + m_v$ hebben we

$$m_i = \frac{q_v}{q_i + q_v} m = \frac{1}{1 + q_i/q_v} m \approx 0{,}88m = 44\ \mathrm{g}$$

Als we blijven pompen, zou het ijs natuurlijk geleidelijk sublimeren, maar dit proces duurt veel langer, dus kunnen we het verwaarlozen.

(b) Het metaal koelt af van zijn begintemperatuur door warmte q_m over te dragen om ijs te smelten:

$$q_m = CM\Delta T$$

Met ΔT het verschil in temperatuur.

Dit kan worden bepaald aan de hand van de dichtheid ρ van het monster voordat het in de calorimeter werd geplaatst. Met behulp van de thermische volume-uitzettingscoëfficiënt β met $\beta = 3\alpha$ krijgen we

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta \Delta T}$$

Het temperatuurverschil ΔT wordt dan:

$$\Delta T = \frac{\rho - \rho_0}{\beta\rho} = \frac{\rho_0 - M/V}{\beta M/V} = \frac{\rho_0 V - M}{\beta M}$$

De hoeveelheid ijs die dan gesmolten kan worden is

$$m_y = \frac{MC\delta T}{q_i} = \frac{MC(\rho_0 V - M)}{Q_i \beta M} = \frac{C(\rho_0 V - M)}{3\alpha q_i} = \frac{0{,}12(6{,}8 \cdot 48 - 325)}{3 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot 80} \approx 64 \text{ g}$$

En dat is meer dan er ijs is, dus alles smelt.

5 (Snelle) trein in een tunnel (R3 2015)

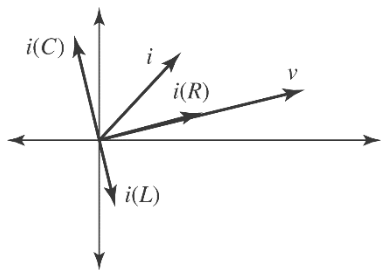
Ja, de bom ontploft. Dit is duidelijk in het frame van de trein. In dit frame heeft de trein lengte L , en de tunnel raast er langs. De tunnel is in lengte teruggebracht tot L/γ. Daarom passeert het uiteinde van de tunnel de voorkant van de trein voordat het dichtstbijzijnde uiteinde de achterkant passeert, zodat de bom ontploft.
We kunnen de dingen echter ook bekijken in het frame van de tunnel. Hier heeft de tunnel lengte L, en de trein is in lengte teruggebracht tot L/γ. Daarom wordt het deactiveringsapparaat geactiveerd voordat de voorkant van de trein het uiteinde van de tunnel passeert, dus je zou kunnen denken dat de bom niet ontploft. Het lijkt erop dat we een paradox hebben.
De oplossing van deze paradox is dat het deactiveringsapparaat de bom niet onmiddellijk kan vertellen dat hij zichzelf moet deactiveren. Het signaal heeft een eindige tijd nodig om over de lengte van de trein van de sensor naar de bom te reizen. En het blijkt dat deze transmissietijd het onmogelijk maakt voor het deactiveringssignaal om de bom te bereiken voordat de bom aan het einde van de tunnel is, hoe snel het signaal ook is.
van de tunnel is, hoe snel de trein ook rijdt. We laten dit zien.
Het signaal heeft de beste kans om deze “race” te winnen als het snelheid c heeft, dus laten we aannemen dat dit het geval is. Het signaal bereikt de bom voordat de bom het einde van de tunnel bereikt als en alleen als een lichtpuls die wordt uitgezonden vanaf het nabije einde van de tunnel (op het moment dat de achterkant van de trein voorbij rijdt) het verre einde van de tunnel bereikt voordat de voorkant van de trein dat doet. Het eerste duurt L/c. Het laatste duurt $L(1 - 1/\gamma)/v$, omdat de voorkant van de trein al een afstand L/γ door de tunnel is. Dus als de bom niet mag ontploffen, moeten we:

$$\frac{L}{c} < L(1 - 1/\gamma)/v$$
$$\leftrightarrow \beta < 1 - \sqrt{1 - \beta^2}$$
$$\leftrightarrow \sqrt{1 - \beta^2} < 1 - \beta$$
$$\leftrightarrow \sqrt{1 + \beta} < \sqrt{1 - \beta}$$

Dit is nooit waar. Daarom komt het signaal altijd te laat en ontploft de bom altijd.

6 R, L en C parallel (R3 2012)

(a) Zoals altijd in een parallelschakeling, geldt ook hier $U = U_r = U_L = U_C$. Voor de stroom moet ook gelden $I = I_R + I_L + I_C$. De stroom door de weerstand $i_R = \frac{v}{R}$ is in fase met de spanning van de spanningsbron. $i_C = v\omega C$ loopt hier op voor en $i_L = \frac{v}{\omega L}$ op achter



(b) Uit het diagram:

$$I^2 = {I_R}^2 + (I_C - I_L)^2 = \left(\frac{U_0}{R}\right)^2 + \left(U_0\omega C - \frac{U_0}{\omega L}\right)^2$$

En dus:

$$I = U_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

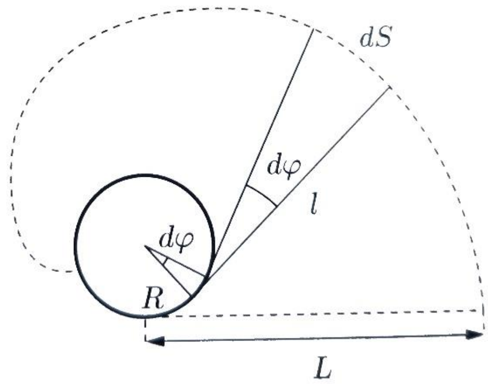
Daar volgt dan uit:

$$I = \frac{U_0}{Z} \Rightarrow \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

7 Puck aan touwtje (Russian Physics Olympiade final stage 2006)

(a) Stel dat het touwtje over een hoek $d\varphi$ wordt opgewonden. Dan heeft de puck een afstand $dS = l\ d\varphi$ afgelegd. De draad is dan $dl = R\ d\varphi$ korter geworden.
Dat gecombineerd: $dS = l\ \ dl/R$
Dus volgt voor de afstand S:

$$S = \int_0^L \frac{l\ dl}{R} = \frac{L^2}{2R}$$



Omdat er geen wrijving (en er geen arbeid verricht wordt) is, zal de kinetische energie gelijk blijven. De snelheid v_0 blijft dus gelijk. Dus volgt voor de tijd:

$$t = \frac{L^2}{2Rv_0}$$

(b) Als er wel wrijving is, zal hetzelfde pad doorlopen worden, maar er zal een versnelling $a = -\mu g$ in de tangentiële richting zijn. Een puck zonder touwtje met een dergelijke versnelling legt een afstand S_1 af (wet A&KE): $S_1 = v_0^2/2\mu g$
Nu zijn er twee situaties te onderscheiden: $S \geq S_1$ en $S \leq S_1$

I Als $S \geq S_1$ dan volgt dus $v_0 \leq L\sqrt{2\mu g/R}$. De puck raakt de cilinder niet, staat al stil voordat dat het geval is. Dat is dus een eenparig versnelde beweging met versnelling $a = -\mu g$. De tijd wordt dus gegeven door:

$$t_{\mathrm{I}} = \frac{v_0}{\mu g}$$

II Als $S \leq S_1$ dan volgt dus $v_0 \geq L\sqrt{2\mu g/R}$. Dan legt de puck de afstand S af met een eenparig versnelde beweging. Dus:

$$S = \frac{L^2}{2R} = v_0 t - \tfrac{1}{2}\mu g t^2$$

Omgeschreven:

$$t^2 - 2\frac{v_0}{\mu g}t + \frac{L^2}{\mu g R} = 0$$

Dit is een kwadratische vergelijking met oplossingen:

$$t_{1,2} = \frac{v_0}{\mu g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_o}{\mu g}\right)^2 - \frac{L^2}{\mu g R}}$$

De benodigde tijd t_{II}moet kleiner zijn dan de eerder gevonden tijd van $t_{\text{I}} = v_0/\mu g$.
Dan blijft enkel over:

$$t_{\text{II}} = \frac{v_0}{\mu g} - \sqrt{\left(\frac{v_o}{\mu g}\right)^2 - \frac{L^2}{\mu g R}} = \frac{v_0}{\mu g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu g L^2}{v_0 R}}\right)$$

(c) Als de tijden gelijk zijn dan volgt:

$$\frac{v_0}{\mu g} = \frac{v_0}{\mu g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu g L^2}{v_0 R}}\right)$$

Hieruit volgt:

$$1 - \frac{\mu g L^2}{v_0 R} = 0$$

Oftewel:

$$\mu = \frac{v_0 R}{g L^2}$$

8 Vuur

De rook zal opstijgen tot zijn dichtheid gelijk is aan de dichtheid van de lucht op dezelfde hoogte. aangezien de molaire massa en druk van de rook en de lucht gelijk zijn, impliceert dit ook gelijke temperaturen (de druk is gelijk, want anders zou er geen mechanisch evenwicht zijn).

De temperatuur van de rook zal dalen met toenemende hoogte als gevolg van adiabatische expansie. Als we de adiabatische proceswet $pV^\gamma = C$ met de ideale gaswet $(pV/T)^\gamma = C$ combineren, dan krijgen we $p^{\gamma-1}/T^\gamma = C$.

Door een logaritme en differentiaal te nemen van deze vergelijking, verkrijgen

$$(\gamma - 1)\frac{dp}{p} - \gamma\frac{dT}{T} = 0$$

dus kunnen we de vergelijking bij benadering gebruiken voor de vereiste temperatuurverandering

$$20\text{K} = \Delta T = T\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\Delta p}{p}$$

Met $\Delta p = \rho g h$ waarbij $\rho = p\mu/RT \approx 1{,}2$ kg/m³ is de luchtdichtheid en $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = (c_v + R)/c_v$ krijgen we

$$\Delta T = \frac{R}{c_v + R}\frac{\mu g h}{R}$$

En dus

$$h = \left(1 + \frac{c_v}{R}\right)\frac{\Delta T R}{\mu g} \approx 1400\text{ m}$$

9 Twee kleine gaatjes (R3 2015)

(a) Fase gat boven: $f_1 = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\phi + \frac{2\pi l_1}{\lambda}$

Fase gat onder: $f_2 = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_m + \frac{2\pi l_1}{\lambda}$

Met l_1 de afstand tot punt op het scherm (voor gaten gelijk en onnodig voor oplossing…)

$f_1 - f_2 = \frac{2\pi d}{\lambda}(\sin\phi - \sin\theta_m) = m2\pi$ voor $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Voor $m = 0$ het hoofdmaximum geldt dan:

$\sin\phi = \sin\theta_0 = \frac{y_0}{z} \rightarrow\ y_0 = z\sin\theta = 750\sin 0{,}0004 = 0{,}3$ mm.

(b) $f_1 = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\phi + \frac{2\pi l_1}{\lambda}$

$f_2 = \frac{2\pi n\delta}{\lambda} + \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_m + \frac{2\pi l_1}{\lambda}$

$f_1 - f_2 = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\phi - \frac{2\pi n\delta}{\lambda} - \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_m = \frac{2\pi\delta}{\lambda}(1-n) + \frac{2\pi d}{\lambda}(\sin\phi - \sin\theta_m) = m2\pi)$

voor een maximum.

Een maximum op $\theta = 0$ levert $\delta(1-n) + d\sin\phi = m\lambda \rightarrow\ \delta = \frac{d\sin\phi}{n-1} + m\frac{\lambda}{n-1}$

dus voor minimale δ geldt: $\delta_{min} = \frac{d\sin\phi}{n-1} = \frac{1\sin 0{,}0004}{1{,}5-1} = 0{,}8\ \mu\text{m}$.

(c) $\delta = \frac{d\sin\phi}{n-1} + 2m\lambda$

(d) $f_1 = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\phi + \frac{2\pi l_1}{\lambda}$

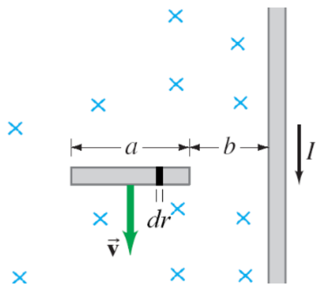
$f_2 = \frac{2\pi n\delta}{\lambda} + \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_m + \frac{2\pi l_1}{\lambda}$

$f_1 - f_2 = \frac{2\pi\delta}{\lambda}(1-n) + \frac{2\pi d}{\lambda}(\sin\phi - \sin\theta_m) = \left(m + \frac{1}{2}\right)2\pi$ voor minimum.

Voor optische as geldt weer: $\theta = 0$: $\delta(1-n) + d\sin\phi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

$\delta = \frac{d\sin\phi}{n-1} + \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n-1} = \delta_{min} + (2m+1)\lambda$ voor $n = 1{,}5$.

10 Draadje



Het magnetisch veld staat loodrecht op de korte staaf. Het magnetisch veld neemt af met toenemende afstand tot de stroomdraad volgens:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

Op de elektronen in de staaf gaat een Lorentzkracht werken. Daardoor ontstaat er een ladingsverdeling in de staaf. In de stationaire situatie zal de elektrische kracht dus gelijk moeten zijn aan de Lorentzkracht. Door de ladingsverdeling zal er een spanning ontstaan tussen de uiteinden van de staaf.

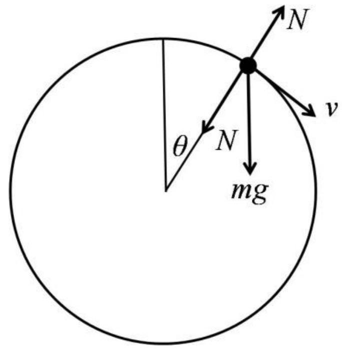
Er moet dus gelden dat de Lorentzkracht gelijk is aan de tegenwerkende elektrische kracht.

Dan volgt voor het spanningsverschil:

$$\Delta V = -\int_b^{a+b} E(r)\,dr = -\int_b^{a+b} \frac{F_e(r)}{q}\,dr = \int_b^{a+b} \frac{F_L(r)}{q}\,dr$$
$$= \int_b^{a+b} \frac{Bqv}{q}\,dr = v\int_b^{a+b} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\,dr = \frac{\mu_0 vI}{2\pi}\int_b^{a+b} \frac{dr}{r}$$
$$= \frac{\mu_0 vI}{2\pi}\left[\ln(a+b) - \ln(b)\right] = \frac{\mu_0 vI}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{b}\right)$$

11 Hoepel(h)op (R3 2009)

(a) N is de normaalkracht van de hoepel op de kraal. Deze normaalkracht is in eerste instantie naar buiten gericht. Daarna is de snelheid van de kraal zo groot dat de normaalkracht juist naar binnen gericht moet zijn.



We gaan eerst op zoek naar het punt van de omkering.
Krachtenevenwicht levert:

$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$

Energiebehoud geeft:

$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$

Dit weer ingevuld in het krachtenevenwicht geeft:

$$0 = \frac{mv^2}{R} - mg\cos\theta = \frac{m\big(2gR(1-\cos\theta)\big)}{R} - mg\cos\theta = mg(2-3\cos\theta)$$

Hieruit volgt dat voor $\theta > 48°$de normaalkracht op de kraal naar binnen gericht is.

(b) De derde wet van Newton geeft aan dat er dus voor θ groter dan 48°een kracht van de kraal op de hoepel naar buiten gericht is.
Eenzelfde krachten en energie beschouwing als bij a.

$$N + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$
$$N = \frac{mv^2}{R} - mg\cos\theta = \frac{m\big(2gR(1-\cos\theta)\big)}{R} - mg\cos\theta = mg(2-3\cos\theta)$$

Omdat er twee kralen zijn, volgt voor de totale omhoog gerichte kracht op de hoepel:

$$2N\cos\theta = 2mg(2-3\cos\theta)\cos\theta$$

Als de hoepel los van de grond moet komen, moet gelden:

$$2mg(2-3\cos\theta)\cos\theta > Mg$$

Oftewel:

$$\frac{m}{M} > \frac{1}{2(2-3\cos\theta)\cos\theta} = \frac{1}{4\cos\theta - 6\cos^2\theta}$$

Doel is nu om het rechterlid te minimaliseren. Oftewel de noemer te maximaliseren.

$$f(\theta) = 4\cos\theta - 6\cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad f'(\theta) = -4\sin\theta + 12\cos\theta\sin\theta = 0$$

Hieruit volgt:

$$\cos\theta = \frac{1}{3}$$

Weer invullen levert:

$$\frac{m}{M} > \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{3} - 6\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Alternatief: De eerste relatie voor de ratio tussen m en M kan ook als volgt geschreven:

$$6m\, cos^2\, \theta - 4m\, cos\, \theta + M = 0$$

Dit kan met de abc-formule worden opgelost. De met D > 0 levert dat dezelfde voorwaarde op als hierboven.

12 Slinger (R3 2007)

Voor ophangpunt G is de slinger een mathematische slinger:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{4l}{g}}$$

Voor ophangpunt H is de slinger een fysische slinger:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_H}{(2m)gl}}$$

De afstand van H tot het zwaartepunt is l

$$I_H = I_{ZP} + (2m)l^2 = (2m(2l)^2 + 2ml^2 = 10ml^2$$

Dus is:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{g}}$$

en volgt:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0{,}89$$