NATUURKUNDE OLYMPIADE 2024 UITWERKING 2e RONDE

Woensdag 24 april 2024

TOETS 1

1 Bungeejumper

(a) Noem de veerconstante van het koord k en zijn gewone lengte l_0. De maximale lengte is $l_1 = h - h_0 = 23$ m, en als alles stil hangt geldt $l_2 = (23 - 8) = 15$ m.
Onderaan is $E_k = 0$, dan geldt $mgh = \frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2$
Als alles stil hangt, geldt $mg = k(l_2 - l_0)$
Deze twee op elkaar delen geeft een kwadratische vergelijking die op te lossen is:

$$l_0^2 + 2(h - l_1)l_0 + (l_1^2 - 2hl_2) = l_0^2 + 4l_0 - 221 = 0$$

En dat geeft: $l_0 = 13$ m.

(b) Hoogste snelheid is bij versnelling nul en dat is als $l = l_2$.
Energiebehoud:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l_0)^2 = mg(l_2 + h_0)$$

Bij stilhangen geldt: $mg = k(l_2 - l_0)$, en daarmee $\frac{m}{k} = \frac{l_2 - l_0}{g}$.
Dit invullen in energiebehoud, levert dat $v = 18$ m/s.
Het koord is in evenwicht $2\ \mathrm{m}$ uitgerekt (mg) bij maximale uitrekking geldt $10\ \mathrm{m}$ uitrekking, dus komt er $4mg$ bij. Dat betkent dat de maximale versnelling $4g$ is.

2 Elektrische geladen deeltjes in een dans om elkaar.

(a) Stel de deeltjes bewegen samen in de z-richting, dan cirkelen ze om elkaar in het xy-vlak.

(b) Neem een referentiekader dat zijn oorsprong heeft in het massamiddelpunt van de twee deeltjes. Daar moeten de deeltjes dan om het massamiddelpunt heen cirkelen.
De middelpuntzoekende kracht moet dan de coulombkracht zijn (F_z is verwaarloosbaar). Deeltjes hebben dezelfde hoeksnelheid. Vanuit het massamiddelpunt geldt:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Verder is de afstand constant: $r_1 + r_2 = d$.
Het massamiddelpunt verdeelt d volgens $\frac{m_1}{m_2}$. Dus geldt:

$$r_1 = \frac{d}{m_1 + m_2} m_2 = \frac{1{,}5\ \mathrm{cm}}{6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{kg} + 12 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{kg}} \cdot 12 \cdot 10^{-12} = 1{,}0\ \mathrm{cm}$$

en dan natuurlijk $r_2 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$ cm

Voor het eerste deeltje geldt met de wet van Coulomb

$$k\frac{Q_1 Q_2}{d^2} = m_1 r_1 \omega^2$$

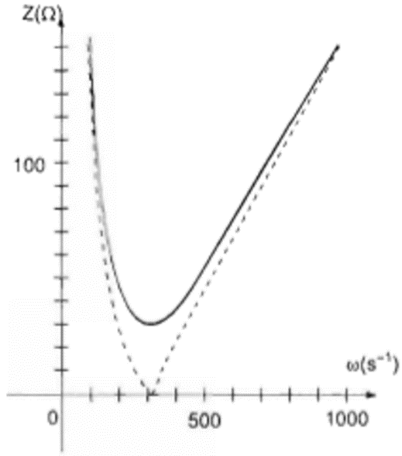
Dus $\omega = \sqrt{k\frac{Q_1 Q_2}{d^2 m_1 r_1}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(2{,}43 \cdot 10^{-13})^2}{(1{,}5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 6 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-2}}} = 6{,}274\ \mathrm{s}^{-1}$.

Dan $v_1 = r_1\omega = 10^{-2} \cdot 6{,}274 = 0{,}0634$ m/s. Het andere deeltje op de helft van de afstand tot het massamiddelpunt heeft dan $v_2 = 0{,}0317$ m/s.

3 Een RCL-circuit

We zoeken de meest eenvoudige oplossing, bijvoorbeeld van R,L en C elk eentje.

De Z heeft een minimum, dus de L en C moeten in serie staan. Z is nergens 0, dus moet er ook een R in de serie zitten. Dan geldt:



$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega C}\right)^2}$$

Bij de minimum impedantie zal gelden dat $Z = R \ = 25\ \Omega$.

Je kunt veel rekenen maar ook het volgende doen:

Bij lage frequenties is $L{\sim}0$ en dan $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$

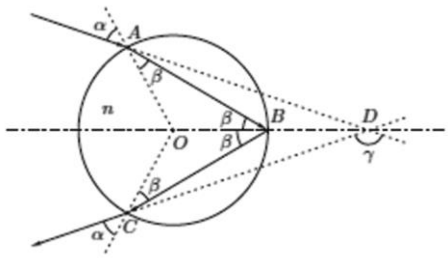
En $C = \frac{1}{\omega\sqrt{z^2 - R^2}} = \frac{1}{20\cdot\sqrt{782^2 - 25^2}} = 6397\ \mathrm{pF}$

Bij hoge frequenties geldt $C{\sim}0$ en $L = \frac{1}{\omega}\sqrt{L^2 - R^2} = \frac{1}{5000}\cdot\sqrt{792^2 - 25^2} = 0{,}1583\ \mathrm{H}$

4 Waterdruppel

(a) β rechts is dezelfde β links bij A als hoek van breking.

Daarvoor geldt $sin\,\alpha = n\,sin\,\beta$ en dus $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)$



(b) $\Delta\,ABD$ en ΔCBD geven

$$\gamma = \pi - 2(\beta - (\alpha - \beta)) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$
$$= \pi + 2\alpha - 4\,sin^{-1}\left(\frac{sin\,\alpha}{n}\right)$$

(c) als we γ differentiëren naar α en dat nul stellen krijgen we:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = 2 - 4\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = 0$$

En daarmee

$$cos^2\,\alpha = \frac{n^2 - 1}{3} \Rightarrow \alpha = cos^{-1}\sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$$

5 Ster

Afstand van bovenkant toren ($h = 2$ m) tot horizon:

Hoek tot horizon: $\cos\alpha = R_A/(R_A + h) = 6400000/6400002 \qquad \alpha = 0{,}054°$

Afstand tot horizon $6400000\ \tan\alpha = 5060\ \mathrm{m} = 5{,}0\cdot 10^3\ \mathrm{m}$

1,5° boven horizon is dan schijnbaar $x = 5000\cdot\tan(1{,}5°) = 132$ m.

Gespiegelde ster in de vlakke zee dan schijnbaar 132 m onder horizon en schijnbare afstand tussen sterren is dan 264 m. $d = 2x\ \cdot\sin\alpha = n\lambda$; $\lambda = 264\ \sin(1{,}5°) = 6{,}8$ m

6 Rollen en transleren

(a) Er moeten 6 krachten getekend worden:

- Zwaartekracht: in het midden van de schijf naar beneden, grootte Mg
- Normaalkracht: op het contactpunt van de schijf met de helling loodrecht op de helling, grootte N
- Wrijvingskracht: op het contactpunt parallel aan de helling omhoog gericht, grootte W
- Spanning in het touw: op het contactpunt van de schijf met het touw, grootte T
- Op het blok de zwaartekracht in het midden naar beneden gericht, grootte mg.
- Spankracht in het touw aangrijpend bovenaan het blok omhoog gericht, grootte T.

De wrijvingskracht op de schijf mag ook de andere kant op getekend worden. De krachten van het touw op de schijf en de massa *m* zijn aan elkaar gelijk want het touw is massaloos. De normaalkracht op de schijf is gelijk aan $F_n = Mgcos\theta.$

(b) Als de schijf een versnelling a_s heeft dan is de versnelling van de massa $a_m = a_s + \alpha R$. Door het slipvrij bewegen, geldt $a_s = \alpha R$, dus $a_m = 2a_s$.
Voor de snelheden: $v_m = 2v_s$

(c) Methode 1: Behoud van mechanische energie:
$\frac{1}{2}Mv_s{}^2 + \frac{1}{2}I\omega_s{}^2 + \frac{1}{2}mv_m{}^2 + mgh_m + Mgh_s = \text{constant.}$
Er geldt: $\frac{dh_m}{dt} = v_m$ en $\frac{dh_s}{dt} = -v_s sin\theta$
Verder: $\frac{1}{2}I\omega_s{}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{v_s}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}Mv_s^2$
Invullen: $\frac{1}{2}Mv_s{}^2 + \frac{1}{4}Mv_s^2 + \frac{1}{2}mv_m{}^2 + mgh_m + Mgh_s = \text{constant.}$
De gevonden vergelijking differentiëren m.b.t. tijd geeft:

$$Mv_s a_s + \frac{1}{2}Mv_s a_s + mv_m a_m + mgv_m - Mgv_s sin\theta = 0$$

Resultaat van opgave (b) invullen:

$$\frac{1}{2}Mv_s a_m + Mv_s a_s + 2mv_s a_m + 2mgv_s - Mgv_s sin\theta = 0$$

Herschrijf m.b.t. a_m en vervolgens door v_s delen: $a_m = 4\frac{(Msin\theta - 2m)g}{3M + 8m}$

Methode 2: Bewegingsvergelijkingen voor translatie en rotatie:
Translatie: $mg - T = ma_m$; $T + W - Mgsin\theta = Ma_s$. Rotatie om massamiddelpunt schijf: $(T - W)R = I\alpha$
Condities van b) invullen en deze vergelijkingen oplossen om tot dezelfde vergelijking van a_m te komen.

B1 Aarde en zon

Stel de aantrekkingskracht tussen de zon en de aarde gelijk aan de middelpuntzoekende kracht die de aarde in haar ongeveer cirkelvormige baan houdt en druk de hoeksnelheid ω uit in termen van T, de omwentelingsperiode. Dit geeft

$$G\frac{mM}{r^2} = mr\omega^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

waarin m en M de respectievelijke massa's van de aarde en de zon zijn, en r de gemiddelde afstand tussen beide. Deel door m en druk M als volgt uit in termen van de gemiddelde dichtheid ρ en straal R van de zon

$$G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}r$$

Dit geeft

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}\left(\frac{r}{R}\right)^3}$$

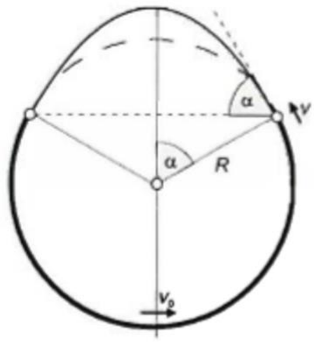
voor de omwentelingsperiode.
Het is duidelijk dat de rotatieperiode van de aarde alleen afhangt van de universele zwaartekrachtconstante G, de gemiddelde dichtheid van de zon en de verhouding r/R. Als de dichtheid van de materie constant blijft, blijft de lengte van een jaar dus onveranderd bij elke verschaling van het zonnestelsel. Het is ook duidelijk dat alleen de dichtheid en grootte van de zon relevant zijn; de gegevens van de aarde zijn dat niet. Elk lichaam dat klein is ten opzichte van de zon zou dezelfde periode hebben en dezelfde baan volgen.
Dit resultaat kan ook worden verkregen met behulp van de derde wet van Kepler $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM$ waarbij a de halve lange as van de elliptische baan van de aarde is. Als de massa van de zon wordt uitgedrukt in termen van de gemiddelde dichtheid, dan is het duidelijk dat een evenredige vermindering de periode van planeten in ellipsbanen niet verandert.

NATUURKUNDE OLYMPIADE 2024 UITWERKING 2^e RONDE

Woensdag 24 april 2024

TOETS 2

7 Verdwenen stuk cirkel



De hoek waar het voorwerp de cirkel verlaat noemen we α.
Dan maakt het voorwerp een parabool om weer precies onder dezelfde hoek op de cirkelbaan terug te komen.
Horizontaal moet het voorwerp dan een afstand $2 \cdot R\, sin\, \alpha$ afleggen om weer precies terug te komen op de cirkel.
Voor de verticale snelheid om tot hoogste punt te komen geldt $v\, sin\, \alpha = gt$. Horizontaal is dan afgelegd:

$$v\, cos\, \alpha \cdot t = \frac{v\, cos\, \alpha \cdot v\ \ sin\, \alpha}{g} = R\, sin\, \alpha$$

Dat levert op $cos\, \alpha = \frac{Rg}{v^2}$

Voor de energie op punt van loskomen uit de cirkel geldt:

$$-mgR(1 + cos\, \alpha) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Dus $v^2 = v_0^2 - 2gR(1 + \cos \alpha)$

En $cos\, \alpha = \frac{Rg}{v_0^2 - 2Rg(1 + cos\, \alpha)}$

Ofwel

$$cos^2\, \alpha + \left(1 - \frac{v_0^2}{2Rg}\right) cos\, \alpha + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{v_0^2}{2Rg} = \frac{400}{2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 9{,}8} = 2{,}5$$

Dat levert voor de cos twee oplossingen: 1 en 0,5 ($\alpha = 60$)

De hap uit de cirkel is dan $2\alpha = 120^o = \frac{2\pi}{3}$

En de lengte van de boog is $\frac{2\pi}{3}R = 17{,}15$ m

8 Schuivende blokken

(a) Als alles gewoon beweegt, kunnen we ook naar het massamiddelpunt kijken.
De som van de krachten is de kracht op het massamiddelpunt.

$$m_1 g\, sin\, \alpha + m_2\, sin\, \alpha - \mu_1 m_1 g\, cos\, \alpha - \mu_2 m_2 g\, cos\, \alpha = (m_1 + m_2) \cdot a$$

Met $m_1 = m_2$ geeft dat:

$$2mg\, sin\, \alpha - (\mu_1 + \mu_2) mg\, cos\, \alpha = 2ma$$

Dus

$\mathrm{a} = \mathrm{g}(\sin \alpha - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \cos \alpha) = 10(\sin\ 15\ - \frac{0{,}4}{2}\ \cos 15) =\ 0{,}656\ m/s^2$.

(b) Tweede wet van Newton voor beide blokken:
Hogere: $mg\, sin\, \alpha + k\Delta l - \mu_1 mg\, cos\, \alpha = ma$
Lagere: $mg\, sin\, \alpha - k\Delta l - \mu_2 mg\, cos\, \alpha = ma$
Aftrekken geeft:

$$2k\Delta l - \mu_1 mg\, cos\, \alpha + \mu_2 mg\, cos\, \alpha = 0$$

$\Delta l = \frac{m}{k} g \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \cdot cos\, \alpha = \frac{3}{200} \cdot 10 \cdot \frac{0{,}2}{2} cos\, 15 = 0{,}01448$ m = 1,45 cm.

9 Supergeleidende ring in magneetveld

(a) De verandering in magnetische flux veroorzaakt een elektromotorische kracht (emk), die een stroom genereert. $\varepsilon = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = RI$, waar $\phi = B_s r_0{}^2\pi + LI$. De weerstand in de ring is $R = 0$, dus moet de emk $\varepsilon = 0$. Daardoor moet de flux ϕ constant zijn m.b.t. tijd.

(b) Beweging van de ring:
De vergelijking voor magnetische flux is gegeven door: $\phi = B_0(1 - az)r_0{}^2\pi + LI$.
Gegeven is dat de initiële condities $z = 0, I = 0$, dus $\phi = B_0 r_0{}^2\pi$.
Hierdoor kan de stroom door de ring gevonden worden als $I = B_0 a r_0{}^2\pi z/L$. Het magnetische veld oefent krachten uit op de stroom in de ring waardoor $F_z = -B_r\, I(z)\, 2\pi r_0 = -B_0\beta r_0\, (B_0 a r_0{}^2\pi z/L)\, 2\pi r_0 z = -kz$.
Newtons tweede wet zegt: $ma_z = F_z - mg = -kz - mg = -2B_0{}^2 a\beta r_0{}^4\pi^2/L - mg$. De ring zal dus harmonisch oscilleren.
Verticale coördinaat als functie van tijd:
$z(t) = A(\cos\omega t - 1)$, waarbij $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2B_0{}^2 a\beta r_0{}^4\pi^2/L}{m}} = B_0 r_0{}^2\pi\sqrt{\frac{2a\beta}{Lm}}$
Ook weten we dat $A = -z(0) = mg/k = \frac{mgL}{2B_0{}^2 a\beta r_0{}^4\pi^2}$
De waardes van deze variabelen invullen geeft $\omega = 31{,}2\ \mathrm{s}^{-1}, A = 1$ cm, en dus $z(t) = 10^{-2}(\cos(31{,}2\mathrm{t}) - 1)$

(c) Stroom als functie van tijd:
$z(t) = A(\cos\omega t - 1)$ invullen in $I = B_0 a r_0{}^2\pi z(t)/L$ geeft $I = B_0 a r_0{}^2\pi(A(\cos\omega t - 1))/L$
We weten dat $A = mg/k$:
$$I = B_0 a r_0{}^2\pi(\cos\omega t - 1)\frac{mg}{kL} = \frac{mg}{2\pi r_0{}^2 B_0\beta}(\cos\omega t - 1)$$
Maximale stroom:
Wanneer $(\cos\omega t - 1) = -2 = |2|, I_{max} = \frac{mg}{2\pi r_0{}^2 B_0\beta}2 = 39A$

10 Pottenbakker

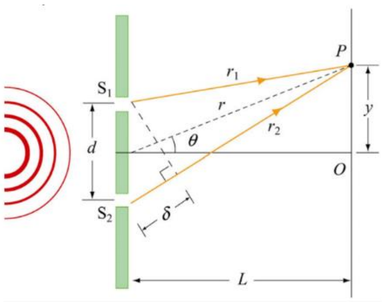
De klomp klei heeft voordat het in contact komt met het wiel geen impuls. Als hij vastplakt heeft de klomp dezelfde impuls als het draaiende wiel. Ook wordt impulsmoment behouden: $L_1 = L_2$ of $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$$\omega_2 = \omega_1\frac{I_1}{I_2} = \omega_1\frac{I_{wiel}}{I_{wiel} + I_{klei}} = \omega_1\frac{\frac{1}{2}M_{wiel}R^2{}_{wiel}}{\frac{1}{2}M_{wiel}R^2{}_{wiel} + \frac{1}{2}M_{klei}R^2{}_{kleil}}$$

De waardes van de onbekenden invullen geeft $\omega_2 = 1{,}36$ rev/s

11 Dubbelspleet

(a) Het faseverschil ϕ tussen de twee aankomende golven bij *P* is gegeven door $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$. De waardes van de variabelen invullen geeft: $\phi = 17.5\ rad$



(b) Wanneer θ klein is; $\sin\theta \approx \tan\theta = y/L$. Hierdoor wordt het faseverschil $\phi \approx \frac{2\pi}{\lambda}dy/L$.
Invullen geeft $\phi = 5.03$ rad

(c) $\frac{1}{3}rad = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$ of $\theta = \sin^{-1}(\frac{1}{3}rad\frac{\lambda}{2\pi d}) = 0.0152°$

(d) $\delta = \lambda/4 = d\sin\theta$ of $\theta = \sin^{-1}(\frac{\lambda}{4d}) = 0.0716°$

12 Rollende cilinder

De baan die gevolgd wordt is dezelfde als die van een slinger.

Voor een slinger geldt $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Drijvende kracht is $F = mg\,\sin(\theta)$, cilinder gaat daarvan naar beneden en gaat ook draaien $v = \omega r$.

Voor de cilinder geldt: $I \;= \frac{1}{2}MR^2$ voor het traagheidsmoment.

Ga even uit van rollen langs een helling met hoek θ.

Dan geldt voor het transleren: $ma = mg\;sin\theta - F_w$

En voor het roteren: $I\alpha = F_w r$, er geldt: $a = \alpha r$ dus geldt voor F_w: $F_w = \frac{Ia}{r^2}$

Dan geldt voor de eerste versnelling:

$$\mathrm{a} = \frac{g\;sin\,\theta}{1 + \frac{I}{mr^2}} = \frac{g\;sin\,\theta}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}g\;sin\,\theta$$

Dit invullen in de formule voor de slinger levert

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{R}\sin\theta}{\frac{2}{3}\mathrm{g}\sin\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2\mathrm{g}}}$$

B2 Nevelvat

	Deeltje is positief	Deeltje is negatief	Deeltje is neutraal	Er valt niets te zeggen over de lading
Deeltje reist: ↑ **B**: ⊗	X			
Deeltje reist: ↑ **B**: ⊙		X		
Deeltje reist: ↑ **B**: →				X
Deeltje reist: ↓ **B**: ←				X
Deeltje reist: ↓ **B**: ⊗		X		
Deeltje reist: ↓ **B**: ⊙	X			