Karakterisering van bodemcolloïden (10 punten)

Colloïdaal onderzoek is onder andere nuttig om bodemdeeltjes te karakteriseren, omdat veel bodemdeeltjes als colloïden van enkele micrometers beschouwd kunnen worden. Brownse beweging (willekeurige beweging van colloïdale deeltjes) kan bijvoorbeeld worden gebruikt om de grootte van de deeltjes te meten.

Deel A. Bewegingen van colloïdale deeltjes (1.6 punten)

We analyseren de eendimensionale Brownse beweging van een colloïdaal deeltje met massa M. De bewegingsvergelijking voor de snelheid $v(t)$ is:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \tag{1}$$

waarbij γ de wrijvingscoëfficiënt is, $F(t)$ een kracht door willekeurige botsingen met watermoleculen en $F_{\text{ext}}(t)$ een externe kracht. In deel A gaan we uit van $F_{\text{ext}}(t) = 0$.

A.1	Stel dat een watermolecuul botst met het deeltje op $t = t_0$, wat het deeltje een impuls I_0 geeft, daarna geldt dan $F(t) = 0$. Als $v(t) = 0$ voor de botsing, dan is $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ voor $t > t_0$. Bepaal v_0 en τ door gebruik te maken van I_0 en andere nuttige parameters uit Eq.1.	0.8pt

Hierna mag je τ gebruiken in je antwoorden.

A.2	In feite botsen watermoleculen na elkaar tegen het deeltje. Stel dat de ie botsing de impuls I_i geeft op tijdstip t_i. Geef nu een uitdrukking voor $v(t)$ op voorwaarde dat $t > 0$ en $v(0) = 0$. Geef ook de ongelijkheid die het bereik van t_i specificeert dat in aanmerking moet worden genomen voor een gegeven tijd t. In het antwoordblad is het niet nodig om dit bereik te specificeren in de uitdrukking voor $v(t)$.	0.8pt

Deel B. Effectieve bewegingsvergelijking (1,8 punten)

De resultaten tot nu toe impliceren dat als $|t - t'| \gg \tau$, de deeltjessnelheden $v(t)$ en $v(t')$ kunnen worden beschouwd als ongecorreleerde willekeurige grootheden. Op basis hiervan introduceren we een theoretisch model om de eendimensionale Brownse beweging bij benadering te beschrijven, waarbij de snelheid willekeurig verandert in elk tijdsinterval δ ($\gg \tau$), d.w.z.,

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \tag{2}$$

met $t_n = n\delta$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ en een willekeurig grootte van v_n. Het voldoet aan

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \tag{3}$$

met een parameter C die afhankelijk is van δ. Hier geeft $\langle X \rangle$ de verwachtingswaarde van X aan. Dat wil zeggen, als je oneindig vaak willekeurige getallen X trekt, zal het gemiddelde $\langle X \rangle$ zijn.

Nu beschouwen we de deeltjesverplaatsing $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ voor $t = N\delta$ met een geheel getal N.

DELEGATION PRINT

B.1	Bepaal $\langle \Delta x(t) \rangle$ en $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ met behulp van C, δ en t.	1.0pt

B.2	De grootheid $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ wordt de gemiddelde kwadratische verplaatsing (MSD) genoemd. Het is een karakteristieke waarneming van de Brownse beweging, die overeenkomt met het limietgeval $\delta \to 0$. Hieruit kunnen we $C \propto \delta^\alpha$ en $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$ afleiden. Bepaal de waardes van α en β.	0.8pt

Deel C. Elektroforese (2.7 punten)

Hier bespreken we elektroforese, d.w.z. transport van geladen deeltjes door een elektrisch veld. Een suspensie van colloïdale deeltjes met massa M en lading Q (> 0) wordt in een smal kanaal met een doorsnede A gebracht (Fig.1(a)). We negeren de interactie tussen de deeltjes, effecten van de wanden van het kanaal, effecten van de vloeistof of de ionen die erin zitten en de zwaartekracht.

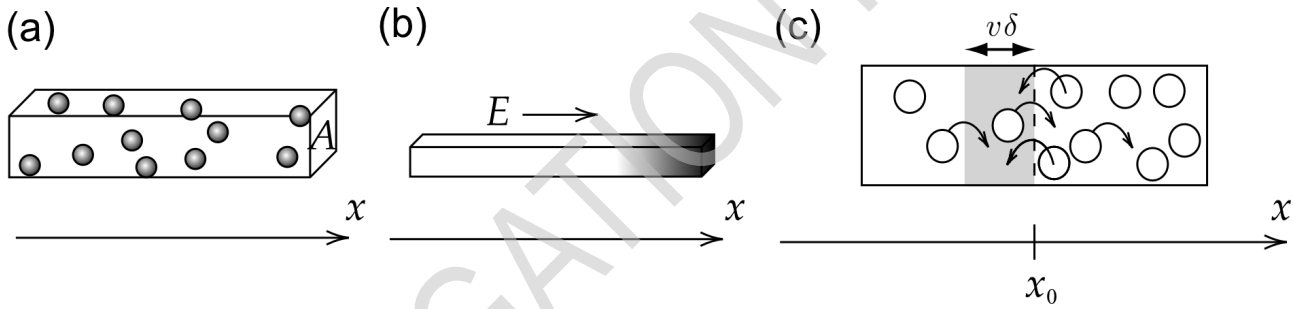


Fig.1:Aanpak van deel C.

Door een uniform elektrisch veld E in de x-richting aan te brengen, worden deeltjes getransporteerd en hun concentratie $n(x)$ (deeltjesaantal per volume-eenheid) wordt daardoor niet-uniform (Fig.1(b)). Wanneer E wordt uitgeschakeld, verdwijnt deze niet-uniformiteit geleidelijk. Dit komt door de Brownse beweging van de deeltjes. Als $n(x)$ niet uniform is, kunnen de aantallen bwegende deeltjes naar rechts en naar links verschillen (Fig.1(c)). Dit genereert een deeltjesflux $J_D(x)$, het gemiddelde aantal deeltjes dat langs de x-as stroomt per doorsnede-eenheid en tijdseenheid. Deze flux voldoet aan

$$J_D(x) = -D\frac{dn}{dx}(x), \tag{4}$$

waarbij D de diffusiecoëfficiënt wordt genoemd.

Laten we nu voor de eenvoud aannemen dat de helft van de deeltjes snelheid $+v$ heeft en de andere helft snelheid $-v$. Laat $N_+(x_0)$ het aantal deeltjes zijn met snelheid $+v$ die x_0 van links naar rechts doorkruisen per eenheid doorsnede en tijdseenheid. Om deeltjes met snelheid $+v$ x_0 te laten kruisen in het tijdsinterval δ moeten ze zich in het gearceerde gebied van Fig.1(c) bevinden. Omdat δ klein is, hebben we $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)\frac{dn}{dx}(x_0)$ in dit gebied.

C.1	Druk $N_+(x_0)$ uit met behulp van de nodige grootheden uit v, δ, $n(x_0)$, en $\frac{dn}{dx}(x_0)$.	0.5pt

We definiëren $N_-(x_0)$ als de tegenhanger van $N_+(x_0)$ voor de snelheid $-v$. Hiermee hebben we $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$. Volgens Eq.(3) hebben we $\langle v^2 \rangle = C$.

DELEGATION PRINT

C.2	Bepaal $J_D(x_0)$ met behulp van de nodige grootheden uit C, δ, $n(x_0)$, en $\frac{dn}{dx}(x_0)$. Druk met behulp hiervan en van Eq.(4) D uit in termen van C en δ, en $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ in termen van D en t.	0.7pt

Nu bespreken we het effect van osmotische druk Π. Deze wordt gegeven door $\Pi = \frac{n}{N_A} RT = nkT$ met de Avogadro-constante N_A, de gasconstante R, de temperatuur T en de Boltzmann-constante $k = \frac{R}{N_A}$. Laten we eens kijken naar de niet-uniforme concentratie die wordt gevormd onder het elektrische veld E (Fig.1(b)). Aangezien $n(x)$ afhangt van x, geldt dat ook voor $\Pi(x)$. Dan moeten de krachten als gevolg van $\Pi(x)$ en $\Pi(x + \Delta x)$ in evenwicht zijn met de totale kracht van het veld E die op de deeltjes werkt (Fig.2). Hier beschouwen we kleine Δx, zodat $n(x)$ kan worden beschouwd als constant over dit bereik, terwijl $n(x + \Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$.

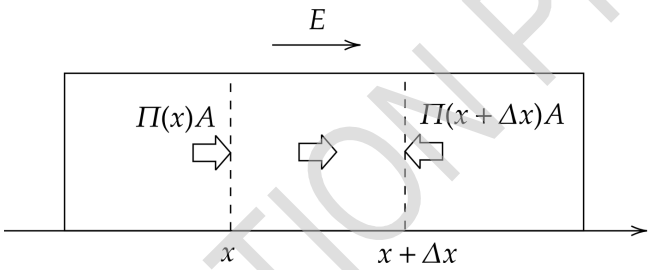


Fig.2: Krachtenbalans.

C.3	Druk $\frac{dn}{dx}(x)$ uit met behulp van $n(x)$, T, Q, E, *en* k.	0.5pt

Laten we nu het evenwicht van de flux bespreken. Naast de flux $J_D(x)$ als gevolg van de Brownse beweging, is er ook een flux als gevolg van het elektrische veld, $J_Q(x)$. Deze wordt gegeven door

$$J_Q(x) = n(x)u, \tag{5}$$

waarbij u de eindsnelheid is van deeltjes die worden aangedreven door het veld.

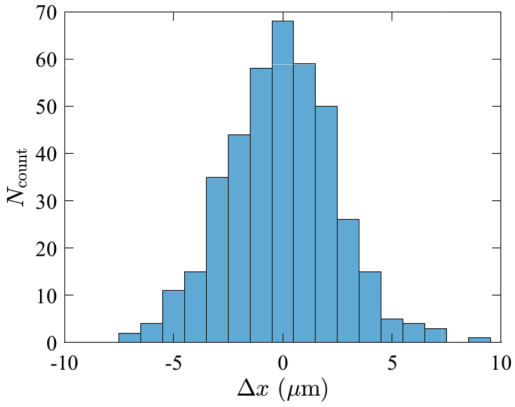
C.4	Om u te bepalen, gebruiken we Eq.(1) met $F_{\text{ext}}(t) = QE$. Aangezien $v(t)$ fluctueert, beschouwen we $\langle v(t) \rangle$. Uitgaande van $\langle v(0) \rangle = 0$ en met behulp van $\langle F(t) \rangle = 0$, evalueren we $\langle v(t) \rangle$ en verkrijgen we $u = \lim_{t \to \infty} \langle v(t) \rangle$.	0.5pt

C.5	De fluxbalans luidt $J_D(x) + J_Q(x) = 0$. Druk de diffusiecoëfficiënt D uit in termen van k, γ en T.	0.5pt

Deel D. Gemiddelde kwadratische verplaatsing (MSD) (2.4 punten)

Stel dat we de Brownse beweging van een geïsoleerd, bolvormig colloïdaal deeltje met straal $a = 5.0\ \mu$m in water observeren. Figuur 3 toont het histogram van verplaatsingen Δx gemeten in de x-richting bij elk interval $\Delta t = 60$ s. De wrijvingscoëfficiënt is gegeven door $\gamma = 6\pi a \eta$ met waterviscositeit $\eta = 8.9 \times 10^{-4}$ Pa · s en de temperatuur was $T = 25\ ^\circ$C.

DELEGATION PRINT



Δx (μm)	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15

Δx (μm)	−3	−2	−1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26

Δx (μm)	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

Fig.3: Histogram van verplaatsingen.

D.1	Schat de waarde van N_A zonder gebruik te maken van het feit dat het de Avogadro-constante is, tot op twee significante cijfers nauwkeurig op basis van de gegevens in Fig.3. De gasconstante is $R = 8.31$ J/K · mol. Gebruik niet de waarde van de Boltzmann-constante k die in de algemene instructies staat. Voor de Avogadro-constante kun je hier een andere waarde krijgen dan in de algemene instructies staat.	1.0pt

Nu breiden we het model in deel B uit om de beweging van een deeltje met lading Q onder een elektrisch veld E te beschrijven. De deeltjessnelheid $v(t)$ beschouwd in Eq.(2) moet worden vervangen door $v(t) = u + v_n$ $(t_{n-1} < t \leq t_n)$ waarbij v_n voldoet aan Eq.(3) en u de eindsnelheid is zoals uitgedrukt in Eq.(5).

D.2	Druk de MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ uit in termen van u, D en t. Bereken bij benadering de machtswetten voor kleine t en grote t, evenals het karakteristieke tijdstip t_* waarop deze verandering optreedt. Teken een ruwe grafiek van de MSD in een log-log diagram en geef de locatie van t_* bij benadering aan.	0.8pt

Vervolgens beschouwen we zwemmende microben (Fig.4(a)), voor de eenvoud in één dimensie (Fig.4(b)). Dit zijn bolvormige deeltjes met straal a. Ze zwemmen met snelheid $+u_0$ of$-u_0$, het teken wordt willekeurig gekozen op elk tijdsinterval δ zonder correlatie. De waargenomen beweging is een combinatie van verplaatsingen door zwemmen en verplaatsingen door de Brownse beweging van een bolvormig deeltje.

DELEGATION PRINT

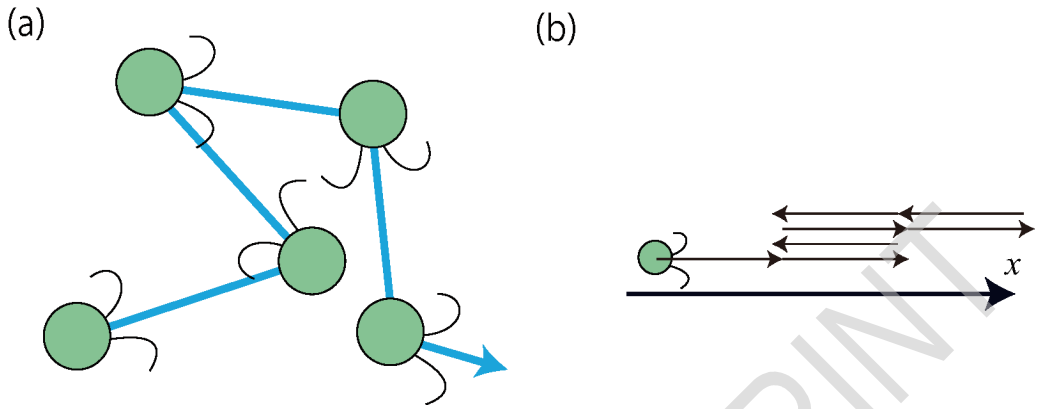


Fig.4: (a) Beweging van microben. (b) De eendimensionale versie.

D.3 Figuur 5 toont de MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ van die microben, met verschillende machten voor kleine, middelgrote en grote t zoals weergegeven met stippellijnen. Leid de machtswet af voor elk tijdsbereik met gebruikmaking van de grootheden D, u_0, δ_0, en t bij één of meer bereiken. 0.6pt

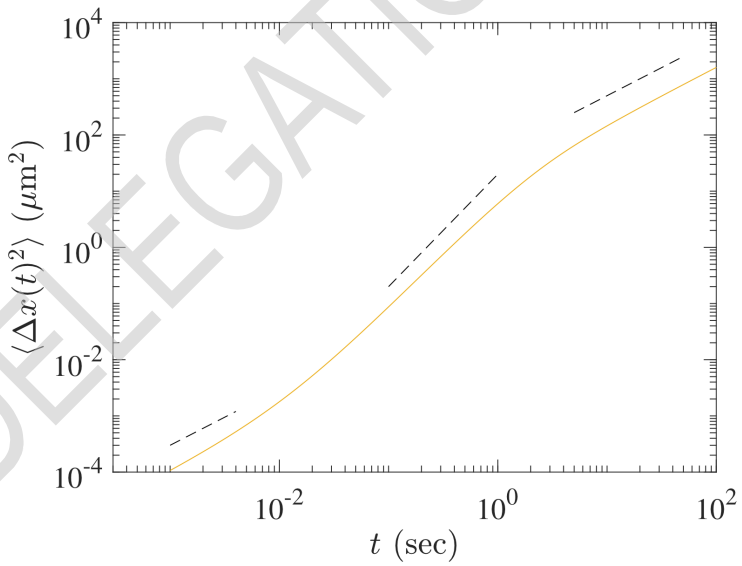


Fig.5: Gemiddelde kwadratische verplaatsing van de microben.

DELEGATION PRINT

Deel E. Waterzuivering (1.5 punten)

Hier bespreken we de zuivering van water met colloidaal-achtige gronddeeltjes, door elektrolyten toe te voegen om ze te laten coaguleren (samenklonteren). Deeltjes interageren door van der Waals kracht en elektrostatische kracht, Deze laatste omvat de effecten van zowel oppervlakteladingen als de omringende laag van tegengesteld geladen ionen omvat (zulke ionen worden counter-ionen genoemd en de combinatie van beide lagen wordt de elektrische dubbele laag genoemd; zie Fig.6(a)). Als gevolg hiervan

is de interactiepotentiaal voor de deeltjesafstand d (Fig.6(b)) gegeven door

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}e^{-d/\lambda}, \tag{6}$$

waarbij A en B positieve constanten zijn, ϵ de diëlektrische constante van water en λ de dikte van de elektrische dubbele laag. Ervan uitgaande dat de ladingen van ionen $\pm q$ zijn, hebben we

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}} \tag{7}$$

met c de molaire concentratie van het ion.

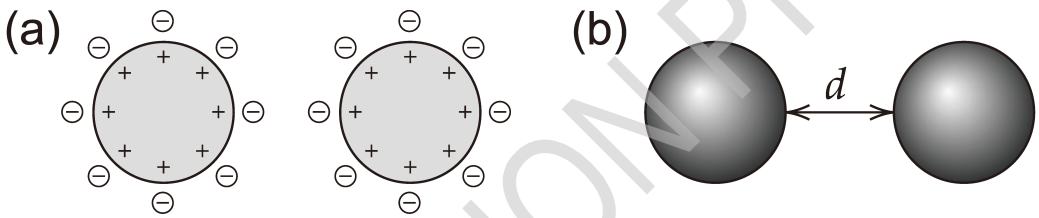


Fig.6: (a) Oppervlakteladingen van colloïdale deeltjes en tegenionen. (b) Definitie van de afstand d.

E.1	Toevoeging van natriumchloride (NaCl) aan de suspensie zorgt ervoor dat colloïdale deeltjes coaguleren. Bepaal de laagste concentratie c van NaCl die nodig is voor coagulatie. Het is voldoende om twee deeltjes zonder thermische fluctuaties te beschouwen, d.w.z. $F(t) = 0$ in vergelijking(1), en aan te nemen dat de eindsnelheid voor de gegeven potentiële kracht ogenblikkelijk wordt bereikt.	1.5pt

DELEGATION PRINT

Karakteriseren van bodemcolloïden (10 punten)

Deel A. Bewegingen van colloïdale deeltjes (1,6 punten)

A.1 (0.8pt)

$v_0 =$

$\tau =$

A.2 (0.8pt)

$v(t) =$

de ongelijkheid die het bereik van t_i specificeert waarmee rekening moet worden gehouden:

Deel B. Effectieve bewegingsvergelijking (1,8 punten)

B.1 (1.0pt)
(Gebruik alleen C, δ, t)

$\langle \Delta x(t) \rangle =$

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$

B.2 (0.8pt)

$\alpha =$

$\beta =$

Deel C. Elektroforese (2,7 punten)

C.1 (0.5pt)
(gebruik alleen $v, \delta, n(x_0), \frac{dn}{dx}(x_0)$)

$N_+(x_0) =$

DELEGATION PRINT

C.2 (0.7pt)
(gebruik alleen $C, \delta, n(x_0), \frac{dn}{dx}(x_0)$)

$J_D(x_0) =$

(gebruik alleen C, δ)

$D =$

(gebruik alleen D, t)

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$

C.3 (0.5pt)
(gebruik alleen $n(x), T, Q, E, k$)

$\frac{dn}{dx}(x) =$

C.4 (0.5pt)

$\langle v(t) \rangle =$

$u =$

C.5 (0.5pt)
(gebruik alleen k, γ, T)

$D =$

DELEGATION PRINT

Deel D. Gemiddelde kwadratische verplaatsing (2,4 punten)

D.1 (1.0pt)

$N_A =$

D.2 (0.8pt)
(gebruik alleen u, D, t)

voor algemene t:

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$

voor kleine t:

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto$

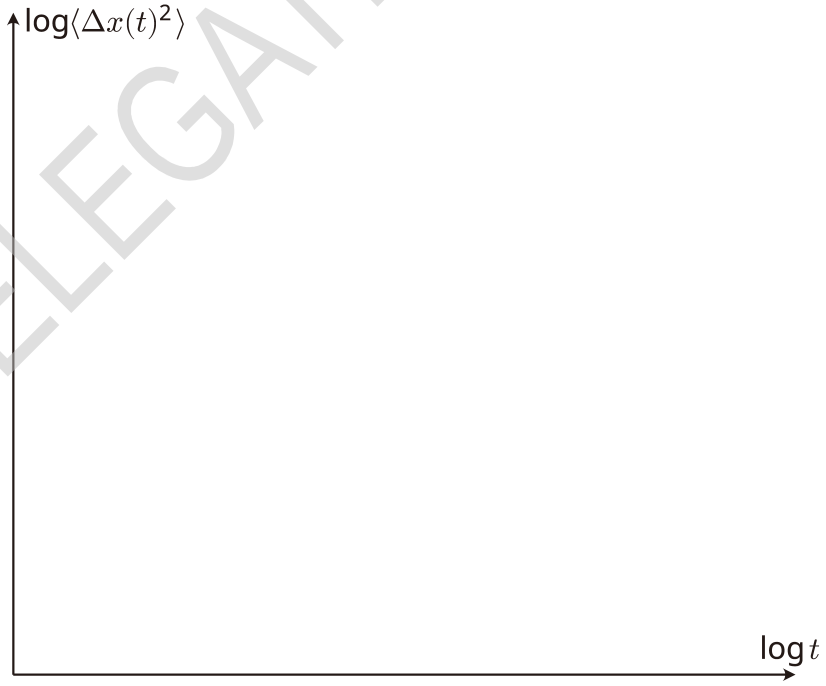
voor grote t:

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto$

de karakteristieke tijd t_*:

$t_* =$

Log-log plot van $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ tegen t:
(geef ook bij benadering de plaats van t_* in de grafiek aan)



DELEGATION PRINT

D.3 (0.6pt)
(gebruik alleen D, u_0, δ_0, t)
voor klein :

voor middelgrote :

voor grote t:

$\langle \Delta x(t)^2 \rangle =$

Deel E. Waterzuivering (1,5 punt)

E.1 (1.5pt)

$c =$

DELEGATION PRINT

Neutronensterren (10 punten)

We behandelen in deze opgave de stabiliteit van grote kernen en bepalen de massa van neutronensterren, zowel theoretisch als experimenteel.

Deel A. Massa en stabiliteit van kernen (2.5 punten)

De rust-energie van een kern $m(Z,N)c^2$ (met c de lichtsnelheid in vacuüm) bestaande uit Z protonen en N neutronen is kleiner dan de som van de rust -energieën van protonen en neutronen, hierna nucleonen genoemd. Dit verschil in energie wordt de bindingsenergie $B(Z,N)$ genoemd.

Als we kleine correcties buiten beschouwing laten, kunnen we de bindingsenergie bestaande uit de volumeterm a_V, de oppervlakteterm a_S, de Coulomb-energieterm a_C, en de symmetrie-energieterm a_{sym} op de volgende manier benaderen:

$$m(Z,N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z,N), \qquad B(Z,N) = a_VA - a_SA^{2/3} - a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}}\frac{(N-Z)^2}{A}, \tag{1}$$

Hierin is $A = Z + N$ het massagetal en m_N de nucleonmassa. Gebruik in de berekening $a_V \approx 15.8\ \text{MeV}$, $a_S \approx 17.8\ \text{MeV}$, $a_C \approx 0.711\ \text{MeV}$, en $a_{\text{sym}} \approx 23.7\ \text{MeV}$ (MeV = 10^6 elektronvolt).

A.1 Neem aan dat $Z = N$. 0.9pt

Bereken die waarde van A waarvoor de bindingsenergie per nucleon B/A maximaal is.

A.2 Stel dat A een bepaalde vaste waarde heeft. Dan wordt het atoomnummer van de meest stabiele kern Z^* bepaald door $B(Z, A-Z)$ te maximaliseren. 0.9pt

Bereken voor $A = 197$ deze Z^* met behulp van vergelijking (1).

A.3 Een kern met een grote waarde voor A breekt in lichtere kernen uiteen (splijting) om de totale rustmassa-energie te minimaliseren. 0.7pt

Voor de eenvoud beschouwen we één van de vele manieren om een kern met (Z,N) te splijten, nl. in twee gelijke kernen. Dit gebeurt als de volgende energierelatie geldt:

$$m(Z,N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

Als de formule wordt geschreven als:

$$Z^2/A > C_{\text{fission}}\frac{a_S}{a_C},$$

bereken dan C_{fission}. Geef je antwoord in twee significante cijfers.

DELEGATION PRINT

Deel B. Neutronenster als gigantische kern (1.5 punt)

Voor grote kernen met een voldoende groot massagetal $A > A_c$ met A_c een drempelwaarde, blijven deze kernen stabiel, ze splijten niet. Dat komt door voldoende grote bindingsenergie door de zwaartekracht.

B.1 We beschouwen een kern met $N = A$ en $Z = 0$ voor een voldoende grote A en nemen aan dat Eq. (1) niet gewijzigd hoeft te worden met de toevoeging van gravitatie bindingsenergie. Deze bindingsenergie door de zwaartekracht wordt gegeven door: 1.5pt

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$

waarbij $M = m_N A$ en $R = R_0 A^{1/3}$ met $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15}$ m $= 1.1$ fm respectievelijk de massa en de straal van de kern zijn.

Bereken voor $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$ a_{grav} in de eenheid MeV. Geef je antwoord in één significant cijfer.

Bereken vervolgens A_c, zonder rekening te houden met de oppervlakteterm. Geef ook dit antwoord in één significant cijfer.

Gebruik in de berekening $m_N c^2 \simeq 939$ MeV en $G = \hbar c / M_P^2$ met $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22}$ MeV en $\hbar c \simeq 197$ MeV $\cdot$ fm.

DELEGATION PRINT

Deel C. Neutronenster in een binair systeem (6.0 punten)

Sommige neutronensterren zijn pulsars die regelmatig elektromagnetische golven uitzenden, die we hier voor het gemak "licht" noemen, met een constante periode. Neutronensterren vormen vaak binaire systemen met een Witte Dwerg.

Laten we eens kijken naar de sterconfiguratie in Fig. 1, waarbij een lichtpuls van een neutronenster **N** naar de aarde **E** in de buurt komt van een Witte Dwerg **W** van het binaire systeem.

Het meten van deze pulsen onder invloed van de zwaartekracht van de ster leidt tot een nauwkeurige bepaling van de massa van **W**, zoals hieronder uitgelegd, wat resulteert in de bepaling van de massa van **N**.

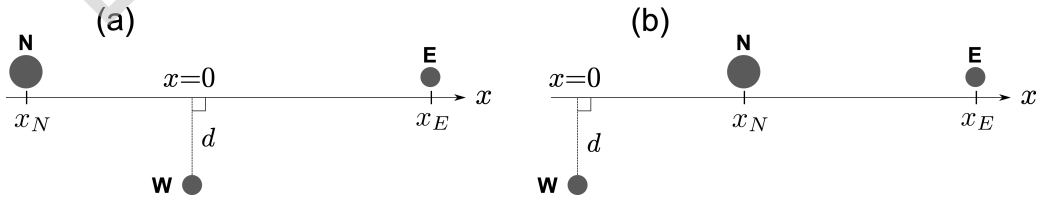
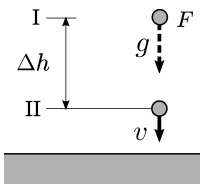


Fig. 1: Configuraties met de x-as langs de lijn die **N** en **E** verbindt. (a) voor $x_N < 0$ en (b) voor $x_N > 0$.

C.1 Zoals te zien is in de figuur hieronder, plaatsen we onder de constante zwaartekrachtversnelling g twee niveaus I en II met het hoogteverschil $\Delta h (> 0)$. Stel de identieke klokken in op I, II en F, het vrij vallende systeem, respectievelijk aangeduid met klok-I, klok-II en klok-F. 1.0pt



Opzet van het gedachte-experiment.

We nemen aan dat een waarnemer bij klok-F zit. En dat F aanvankelijk op dezelfde hoogte is geplaatst als klok-I en dat zijn snelheid nul is.
Aangezien de klokken identiek zijn, registreren ze gelijke tijdsintervallen $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\mathrm{I}}$.
Vervolgens laten we F vrij vallen en werken we in het stelsel van F, dat als inertiaal wordt beschouwd.
In dit stelsel passeert klok-II klok-F met snelheid v, zodat de tijddilatatie van klok-II kan worden bepaald door de Lorentz-transformatie.
Als tijd $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ verstrijkt op klok-F, verstrijkt tijd $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ op klok-II.
Bereken $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ in termen van $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ tot de eerste orde in $\Delta\phi/c^2$, waarbij $\Delta\phi = g\Delta h$ een verschil is van de zwaartekrachtpotentiaal, d .*w*.z. de zwaartekrachtpotentiaalenergie per massa-eenheid.

C.2 Onder de zwaartekrachtpotentiaal ϕ veranderen tijdsvertragingen de effectieve lichtsnelheid, c_{eff}, waargenomen in het oneindige, desondanks is de lokale lichtsnelheid c. 1.8pt
Als $\phi(r = \infty) = 0$ kan c_{eff} tot de eerste orde in ϕ/c^2 gegeven worden door

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c$$

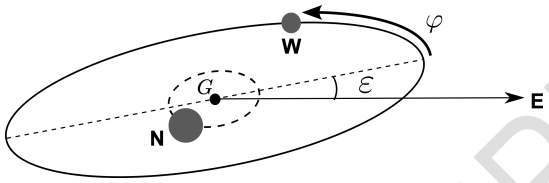
inclusief het effect van ruimtevervorming wat niet voorkwam in **C.1**. Merk op dat het lichtpad kan worden benaderd als een rechte lijn.
Zoals getoond in Fig. 1(a) nemen we de x-as langs het lichtpad van de neutronenster **N** naar de Aarde **E** en plaatsen $x = 0$ op het punt waar de Witte Dwerg **W** het dichtst bij het lichtpad is. Laat $x_N\,(< 0)$ de x-coördinaat van **N** zijn, $x_E\,(> 0)$ die van **E**, en d de afstand tussen **W** en het lichtpad.

Schat de veranderingen van de aankomsttijd Δt van het licht van **N** naar **E** veroorzaakt door de Witte Dwerg met massa M_{WD} en herschrijf het antwoord in een eenvoudige vorm zonder rekening te houden met hogere orde termen van de volgende kleine grootheden: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$, en $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$.
Gebruik zo nodig de volgende formule.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x}\right) + C. \qquad (\log \text{ is the natural logarithm})$$

DELEGATION PRINT

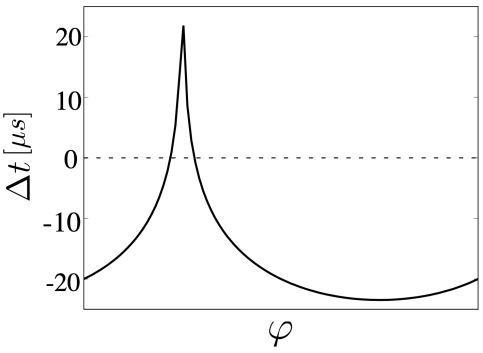
C.3 Zoals hieronder getoond, wordt aangenomen dat in een dubbelstersysteem **N** en **W** in cirkelbanen bewegen met een excentriciteit van nul rond het massamiddelpunt G op het baanvlak. Laat ε de inclinatiehoek van de baan zijn, gemeten vanaf het baanvlak naar de lijn gericht naar **E** vanaf G, en laat L de lengte tussen **N** en **W** zijn en M_{WD} de massa van de Witte Dwerg. In het volgende nemen we aan dat $\varepsilon \ll 1$. 1.8pt



Binair sterrensysteem.

We nemen lichtpulsen waar van **N** op **E** ver weg van **N**. De lichtweg naar **E** varieert met de tijd, afhankelijk van de configuratie van **N** en **W.** De vertraging in het tijdsinterval van aankomende pulsen op **E** heeft de maximumwaarde Δt_{max} voor $x_N \simeq -L$ en de minimumwaarde Δt_{min} voor $x_N \simeq L$. (Zie Fig. 1(b) voor de situatie.)
Bereken $\Delta t_{\mathrm{max}} - \Delta t_{\mathrm{min}}$ in een eenvoudige vorm zonder rekening te houden met hogere orde termen van kleine grootheden zoals gedaan in **C.2**.
Neem aan dat de vertragingen door zwaartekracht van andere stellaire objecten dan **W** zich opheffen in $\Delta t_{\mathrm{max}} - \Delta t_{\mathrm{min}}$.

C.4 De onderstaande figuur toont de waargenomen tijdvertragingen als functie van de baanfase φ voor het dubbelstersysteem met $L \approx 6 \times 10^6\,\mathrm{km}$ en $\cos\varepsilon \approx 0.99989$. 0.8pt
Bereken M_{WD} in termen van de zonsmassa $M_\odot$ en geef het resultaat voor $M_{\mathrm{WD}}/M_\odot$ in één significant cijfer. Hier kan de benaderende relatie, $GM_\odot/c^3 \approx 5\,\mu\mathrm{s}$, worden gebruikt.



Waargenomen tijdsvertragingen Δt als functie van de baanfase φ (zie de figuur in **C.3**) om **N** en **W** op de banen te lokaliseren.

DELEGATION PRINT

C.5 In het binaire systeem van neutronensterren geven twee sterren energie en impulsmoment vrij door zwaartekrachtgolven uit te zenden. Uiteindelijk botsen ze en smelten ze samen. 0.4pt

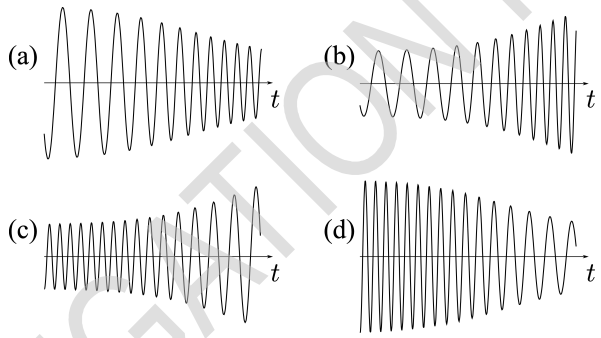
Laten we voor het gemak alleen een cirkelvormige beweging beschouwen met de straal R en de hoeksnelheid ω en dan geldt $\omega = \chi R^p$ met de constante χ die noch van ω noch van R afhangt als relativistische effecten verwaarloosd worden.

Bereken de waarde van p.

C.6 De amplitude van de uitgezonden zwaartekrachtgolf van het dubbelstersysteem in **C.5** is evenredig met $R^2\omega^2$. 0.2pt

Onderstaande figuur toont kwalitatief vier verschillende tijdelijke profielen van de waargenomen zwaartekrachtgolven vóór de botsing van twee sterren.

Kies het meest geschikte profiel uit (a) tot en met (d).



Waargenomen gegevensprofielen van zwaartekrachtgolven.

DELEGATION PRINT

Neutronensterren (10 punten)

Deel A. Massa en stabiliteit van kernen (2.5 punten)

A.1 (0.9pt)

$A =$

A.2 (0.9pt)

$Z^* =$

A.3 (0.7pt)

$C_{\text{fission}} =$

Deel B. Neutronenster als gigantische kern (1.5 punt)

B.1 (1.5pt)

$a_{\text{grav}} =$

$A_c =$

Deel C. Neutronenster in een binair systeem (6.0 punten)

C.1 (1.0pt)

$\Delta\tau_{\text{II}} =$

C.2 (1.8pt)

$\Delta t =$

C.3 (1.8pt)

$\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}} =$

DELEGATION PRINT

C.4 (0.8pt)

$M_{\mathrm{WD}}/M_{\odot} =$

C.5 (0.4pt)

$p =$

C.6 (0.2pt)

Het meest geschikte profiel is

DELEGATION PRINT

Water en objecten (10 punten)

In dit probleem bekijken we de verschijnselen die worden veroorzaakt door de interactie tussen water en voorwerpen, gerelateerd aan oppervlaktespanning. Deel A behandelt beweging, terwijl delen B en C betrekking hebben op statische situaties.

Indien nodig kun je gebruik maken van het feit dat als de functie $y(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $y''(x) = ay(x)$ (a is een positieve constante) de algemene oplossing dan $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$ is, waarbij A en B willekeurige constanten zijn.

Deel A. Samenvoegen van waterdruppels (2.0 punten)

Zoals getoond in Fig.1, beschouwen we twee stationaire, sferische waterdruppels op het oppervlak van een sterk super-hydrofoob materiaal. Dit wil zeggen dat er een sterke afstotende kracht bestaat tussen het materiaal en het water.

In eerste instantie worden twee identieke aangrenzende bolvormige waterdruppels op het oppervlak geplaatst; nadat ze elkaar raken worden deze twee druppels samengevoegd en vormen ze een grotere bolvormige waterdruppel, die plotseling omhoog springt.

A.1	De straal a van beide waterdruppels voor het samengaan is $100\ \mu$m. De dichtheid van water ρ is 1.00×10^3 kg/m^3. De oppervlaktespanning γ is 7.27×10^{-2} J/m^2. Een fractie k van het verschil van de oppervlakte-energie voor en na de samenvoeging, ΔE, wordt omgezet in de kinetische energie van de gesprongen waterdruppel. Bepaal vervolgens de initiële sprongsnelheid, v, van de samengesmolten waterdruppel in twee significante cijfers onder de volgende aannames: • $k = 0.06$ • Voor en na de fusie is het totale watervolume gelijk.	2.0pt

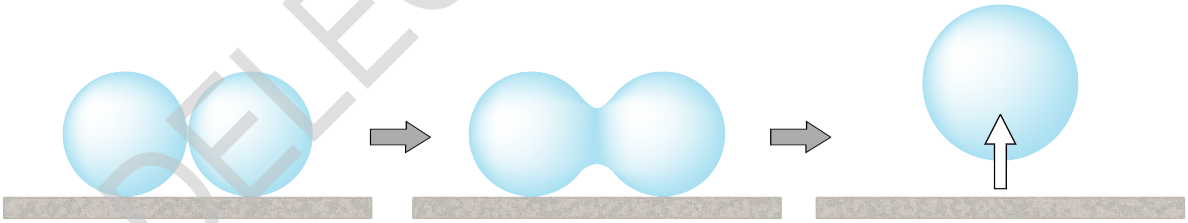


Fig. 1: Samenvoeging van twee waterdruppels en sprong van de samengevoegde waterdruppel.

Deel B. Een verticaal geplaatste plaat (4.5 punten)

Een vlakke plaat wordt verticaal in water geplaatst. Figuren 2(a) en 2(b) tonen respectievelijk de vormen van het wateroppervlak voor de hydrofiele (d.w.z. water aantrekkende) en hydrofobe (d.w.z. water afstotende) plaatmaterialen. We verwaarlozen de dikte van de plaat.

Het oppervlak van de plaat ligt op het yz -vlak en het horizontale wateroppervlak ver van de plaat ligt op het xy -vlak met $z = 0$. De vorm van het oppervlak hangt niet af van de y-coördinaat. Laat $\theta(x)$ de hoek zijn tussen het wateroppervlak en het horizontale vlak in een punt (x, z) op het wateroppervlak in het xz vlak. Hier wordt $\theta(x)$ gemeten ten opzichte van de positieve as x en de rotatie linksom (counterclockwise)

DELEGATION PRINT

wordt als positief genomen. Laat $\theta(x)$ θ_0 zijn op het raakpunt tussen de plank en het wateroppervlak ($x = 0$). In het vervolg is $\theta_0$vastgelegd door de eigenschappen van het plaatmateriaal.

De dichtheid van het water ρ is constant en de oppervlaktespanning van het water γ is uniform. De gravitatieversnellingsconstante wordt gegeven door g. We nemen aan dat de atmosferische druk,P_0, altijd uniform is. Laten we de vorm van het wateroppervlak in de volgende stappen bepalen.

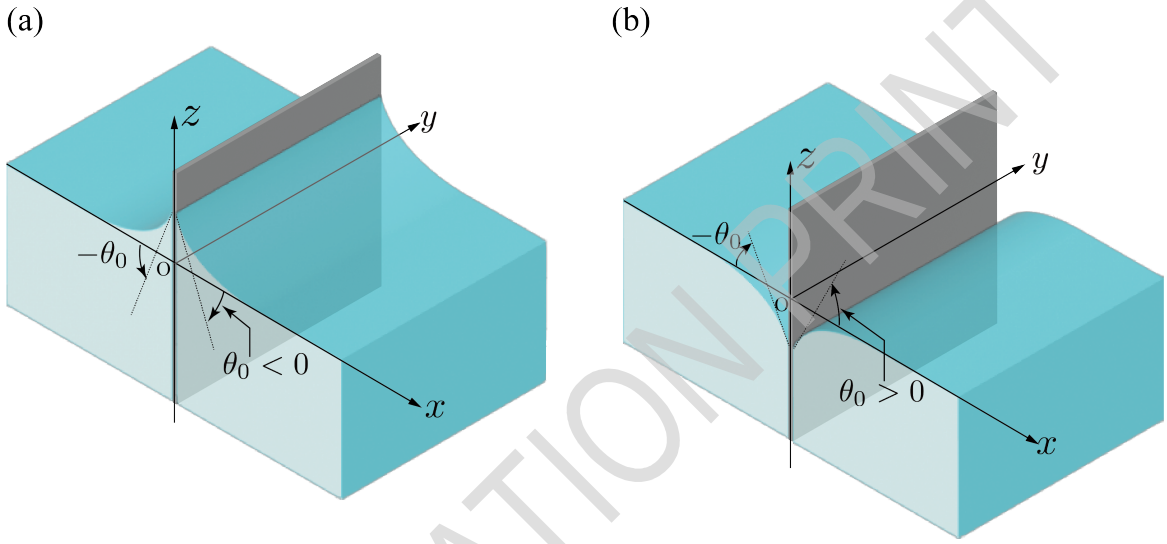


Fig. 2: Platen verticaal geplaatst in water. (a) hydrofiele plaat; (b) hydrofobe plaat.

DELEGATION PRINT

B.1	We beschouwen een hydrofiele plaat, zoals getoond in Fig.2(a). We merken op dat de waterdruk, P, voldoet aan de voorwaarden $P < P_0$ voor $z > 0$ en $P = P_0$ voor $z = 0$. Druk dan$P$ als functie van z uit in termen van ρ, g, z, en P_0.	0.6pt

B.2	We beschouwen een waterblok waarvan de uitsnede gearceerd is weergegeven in Fig.3(a). De doorsnede in het vlak xz is weergegeven in een gearceerd gebied in Fig.3(b). Laat z_1 en z_2 respectievelijk de linker en rechter randcoördinaten zijn van de grens (wateroppervlak) tussen het waterblok en de lucht. Bereken de horizontale component (x component) van de netto kracht f_x, per lengte-eenheid langs de y-as, die door de druk op het waterblok wordt uitgeoefend, in termen van ρ, g, z_1, en z_2. Merk op dat P_0niet resulteert in een netto horizontale kracht op het waterblok.	0.8pt

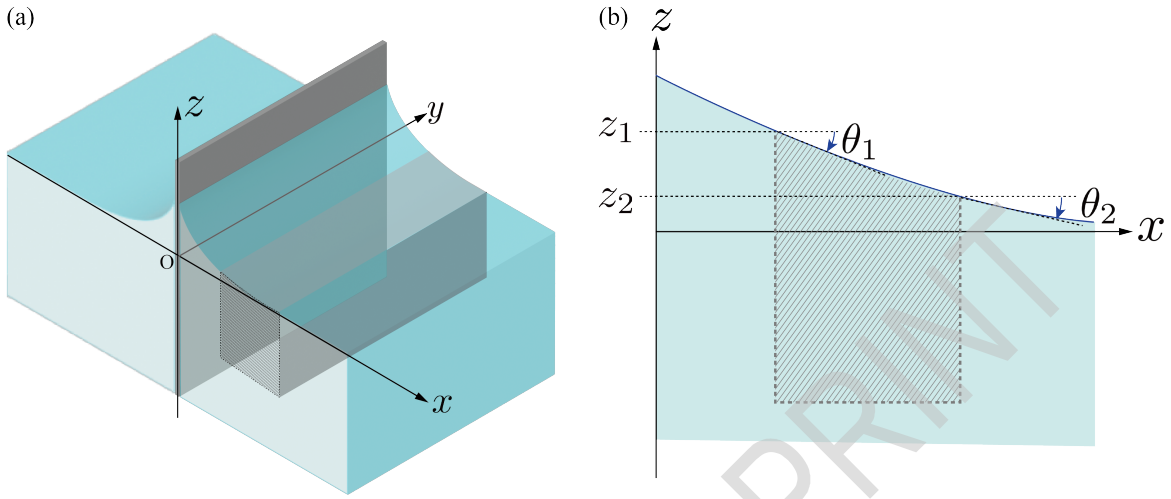


Fig. 3: De vorm van het waterblok op het wateroppervlak. (a) Vogelvluchtperspectief en (b) dwarsdoorsnede.

B.3	De oppervlaktespanning die op het waterblok werkt is in balans met de kracht f_x besproken in B.2. We definiëren respectievelijk θ_1 en θ_2 als de hoeken tussen het wateroppervlak en het horizontale vlak aan de linker- en rechterrand. Druk f_x uit in termen van γ, θ_1, en θ_2.	0.8pt

B.4	De volgende vergelijking geldt voor een willekeurig punt (x, z) op het wateroppervlak, $$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^a + \cos\theta(x) = \text{constant}. \quad (1)$$ Bepaal de exponent a en druk de constante ℓ uit in termen van γ en ρ. Merk op dat deze vergelijking geldt voor zowel hydrofiele als hydrofobe plaatmaterialen.	0.8pt

B.5	In vergelijking (1) in B.4 nemen we aan dat de variatie van het wateroppervlak langzaam is (d.w.z. $\lvert z'(x)\rvert \ll 1$). Daardoor kunnen we een expansie maken van $\cos\theta(x)$ met betrekking tot $z'(x)$ tot de tweede orde. Door vervolgens de resulterende vergelijking te differentiëren met betrekking tot x verkrijgen we de differentiaalvergelijking waaraan $z(x)$ voldoet. Los deze differentiaalvergelijking op en bepaal $z(x)$ voor $x \geq 0$ in termen van $\tan\theta_0$ en ℓ. Merk op dat de verticale schaal van figuur 2 en 3 uitvergroot is voor een betere weergave, waardoor dit niet goed de conditie $\lvert z'(x)\rvert \ll 1$ weergeeft.	1.5pt

Deel C. Interactie tussen twee staven (3.5 punten)

De identieke staven A en B van hetzelfde materiaal die parallel drijven op het wateroppervlak worden op dezelfde afstand van de y-as geplaatst (Fig.4).

DELEGATION PRINT

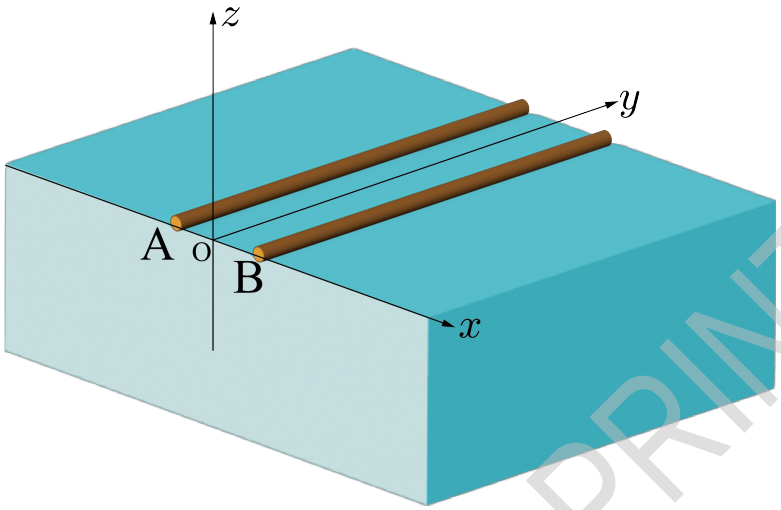


Fig. 4: Twee staven A en B drijvend op het wateroppervlak.

C.1	Op de contact-posities tussen de staaf B en het wateroppervlak definiëren we de z-coördinaten z_a en $z_b$en de hoeken θ_a en θ_b, zoals weergegeven in figuur 5. Bepaal de horizontale krachtcomponent, F_x, op de staaf B per lengte-eenheid langs de y-as in termen van θ_a, θ_b, z_a, z_b, ρ, g, en γ.	1.0pt

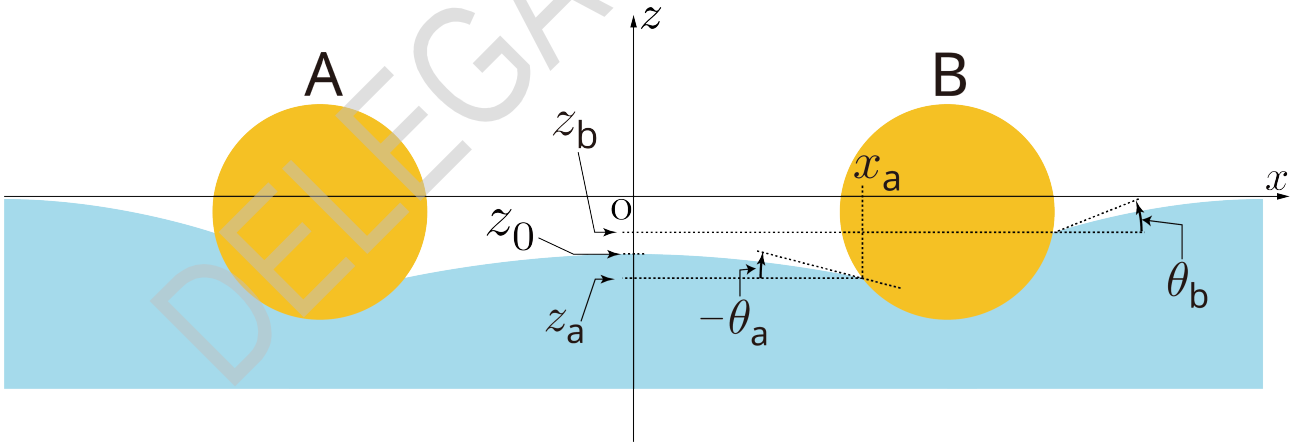


Fig. 5: Verticale dwarsdoorsnede van twee staven drijvend op het wateroppervlak.

C.2	We definiëren de z-coördinaat van het wateroppervlak, z_0, op het middelpunt van twee staven in het xz vlak. Druk de kracht F_x verkregen in C.1 uit zonder gebruik te maken van θ_a, θ_b, z_a, en z_b.	1.5pt

DELEGATION PRINT

C.3	Laat x_a de x-coördinaat zijn van het contactpunt tussen het wateroppervlak en het linker zijde van de staaf B. Druk met behulp van de in B.4 verkregen differentiaalvergelijking de coördinaat van het waterniveau z_0 van het middelpunt van deze twee staven A en B uit in termen van x_a en z_a. Je kunt de in B.4 geïntroduceerde constante ℓ gebruiken.	1.0pt

DELEGATION PRINT

Water en objecten (10 punten)

Deel A. Samenvoegen van waterdruppels (2.0 punten)

A.1 (2.0pt)

$v =$

Deel B. Een verticaal geplaatste plaat (4.5 punten)

B.1 (0.6pt)

$P =$

B.2 (0.8pt)

$f_x =$

B.3 (0.8pt)

$f_x =$

B.4 (0.8pt)

$a =$

$\ell =$

DELEGATION PRINT

B.5 (1.5pt)

$z(x) =$

Deel C. Interactie tussen twee staven die op het wateroppervlak drijven (3.5 punten)

C.1 (1.0pt)

$F_x =$

C.2 (1.5pt)

$F_x =$

C.3 (1.0pt)

$z_0 =$

DELEGATION PRINT