# Finale Natuurkunde Olympiade 2023
# Uitwerking toetsen

**1 Relativistisch wandelen**

De snelheid van Gerrit en Jan zijn beide relativistisch.
Het gaat om lichtgolven dus relativistische variant van het Doppler effect:

$$\lambda_{waarnemer} = \lambda_{bron}\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Als we definiëren $\beta = v/c$ en $\alpha = \lambda_{waarnemer}/\lambda_{bron}$ dan volgt:

$$\beta = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

Hieruit volgt:

$$v_{Gerrit} = \left(\frac{1 - \left(\lambda_g/\lambda_o\right)^2}{1 + \left(\lambda_g/\lambda_o\right)^2}\right)c = \left(\frac{1 - (550/600)^2}{1 + (550/600)^2}\right) \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 = 2{,}60 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

En:

$$v_{Jan} = \left(\frac{1 - \left(\lambda_g/\lambda_r\right)^2}{1 + \left(\lambda_g/\lambda_r\right)^2}\right)c = \left(\frac{1 - (550/700)^2}{1 + (550/700)^2}\right) \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 = 7{,}10 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Het verschil is dus $4{,}50 \cdot 10^7$ m/s.

**2 Brandglas**

Tweemaal percentage verrekenen samen met het oppervlak van de lens:

$$P_{in} = I_{in} \cdot A = 0{,}60 \cdot 0{,}65 \cdot K \cdot A = \frac{0{,}39\ \pi D^2 K}{4} \text{ W}$$

Bij evenwicht zal het balletje hetzelfde vermogen uitstralen als ontvangen.
Als $T$ de temperatuur van het balletje is en $T_o$ de temperatuur van de omgeving dan volgt:

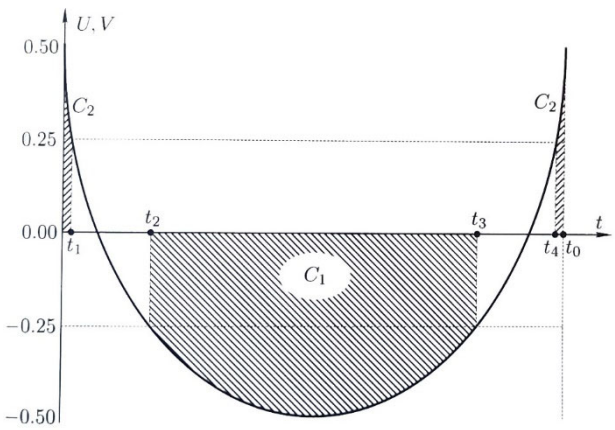
$$4\pi r^2 \sigma T^4 = 4\pi r^2 \sigma T_0^4 + \frac{0{,}39\ \pi D^2 K}{4}$$

Hierin is $\sigma$ de constante van Stefan-Boltzman. Dit oplossen levert:

$$T = \sqrt[4]{T_0^4 + \frac{0{,}39\ D^2 K}{16\sigma r^2}} = 1206 \text{ K} = 933\ ^\circ\text{C}$$

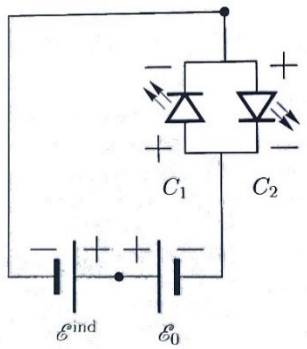
**3 LEDs** (Russian Physics Olympiads 2005 – 2017, som 30)

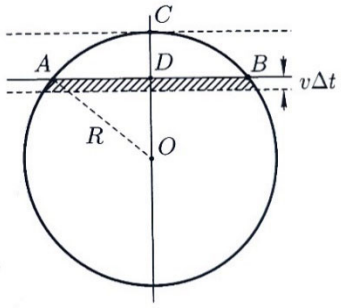
(a) Er zal een inductiespanning worden opgewekt die de spanning over de LEDs zal doen afnemen. De grootste inductiespanning ontstaat bij de grootste fluxverandering, dat is als de staaf halverwege de magneet is.
De grafiek zal dus de volgende vorm hebben:




Het is de vraag of de LED $C_1$ licht gaat geven, de inductiespanning moet dan minimaal een spanning van 0,75 V zijn.

(b) De inductiespanning is in dat geval dus 0,75 V. Zie onderstaand plaatje voor het bepalen van de flux.




$$|AB| = 2|AD| = 2\sqrt{R^2 - (R^2 - vt)^2} = 2\sqrt{vt(2R - vt)}$$
$$\Delta\Phi = B \cdot |AB| \cdot v\Delta t$$
$$\varepsilon_{ind} = 2Bv\sqrt{vt(2R - vt)}$$

De grootste fluxverandering is op het tijdstip $t = R/v$. Dus geldt:

$$|\varepsilon_{ind}|_{max} = 2BvR$$

Oplossen:

$$2BvR = 0{,}75$$
$$v = \frac{0{,}75}{2BR} = \frac{0{,}75}{2 \cdot 1 \cdot 0{,}05} = 7{,}5 \text{ m/s}$$

**4 Samengesteld systeem**

(a) Door het uitschrijven van de mogelijke verdelingen en het aantal realiseringsmogelijkheden van elke verdeling, kan het totaal worden berekend. Voor de berekening van het aantal realisaties van een verdeling geldt:

$$\omega = \frac{N!}{N_0!\,N_1!\ldots}$$

| ... | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |
| | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | |
| 0 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | |
| $\omega$ | 4 | 12 | 12 | 4 | 6 | **38** |

$$\omega(1,3) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$$\omega(1,1,2) = \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = 12$$

$$\omega(2,2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

(b) De Boltzmann formule voor entropie zegt: $S_i = k_B ln\Omega$, waarbij $\Omega$ het aantal realiseringsmogelijkheden is van het systeem onder beschouwing. Het totaal aantal mogelijkheden voor de gecombineerde deelsystemen is het product van het aantal mogelijkheden van de afzonderlijke deelsystemen. Het is nog nodig om het aantal realiseringsmogelijkheden van het deelsysteem $L$ te berekenen. Dit kan op een manier die vergelijkbaar is met de methode van vraag (a).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 4 | |
| 0 | 3 | 2 | 1 | 2 | 0 | |
| $\omega$ | 4 | 12 | 12 | 6 | 1 | **35** |

$$\omega(1,3) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$$\omega(1,1,2) = \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = 12$$

$$\omega(2,2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

$$\omega(4) = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$$

Nu is $S_i = k_B ln\Omega_i = k_B ln(\Omega_{L,i} \times \Omega_{L,i}) = k_B ln(35 \times 38) = k_B ln1330$

**5 Water koken met plutonium**

Voor het verval van plutonium geldt:

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}}$$

Hierin is $N_0$ het aantal kernen plutonium op $t = 0$ s. De activiteit wordt dus gegeven door:

$$A(t) = N'^{(t)} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}} \cdot \frac{1}{t_{1/2}} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} N(t)$$

Als we de activiteit vermenigvuldigen met de gemiddelde energie die vrijkomt per vervallen kern en we verrekenen het rendement van $\eta = 0{,}80$ dan verkrijgen we het thermische vermogen dat het water kan verwarmen.

Voor het water geldt dat het in een tijd $t = 3 \text{ min} = 180 \text{ s}$ in totaal een warmte $Q = mc\Delta T$ moet opnemen. Waarden: $m = 0{,}300 \text{ L}$, $c = 4180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ en $\Delta T = (100 - 15) \text{ °C} = 85 \text{ °C}$.

Omdat de tijd ($3 \text{ min}$ ) veel kleiner is dan de halfwaardetijd, mogen we aannemen dat de activiteit constant is.

$$E\eta N_0 \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{mc\Delta T}{t}$$

Hierin is $E$ de energie per vervallen kern (in J).

$$N_0 = \frac{mc\Delta T \; t_{1/2}}{E\eta t \ln 2} = 3{,}312 \cdot 10^{24}$$

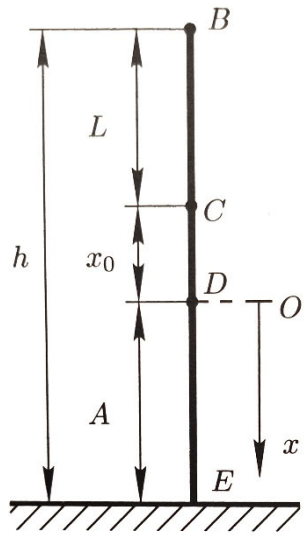
De molaire massa van plutonium $^{238}\text{Pu}$ is$M = 238{,}05$ g. Daarom is nodig:

$$m = \frac{N_0 M}{N_A} = 1309 \text{ g}$$

We zien dat we 1,3 kg plutonium nodig hebben om bijna 600 W op te wekken, wat niet zo veel is. Het wordt veel gebruikt in zogenaamde radio-isotopen thermo-elektrische generatoren (RTG's). $^{238}\text{Pu}$ wordt (of werd) bijvoorbeeld gebruikt in de Curiosity-rover, ruimtesondes Cassini, New Horizons of maanmodules van het Apollo-programma. RTG's in het algemeen hebben isotopen nodig die deeltjes uitzenden van voldoende hoge energie, een optimale halveringstijd hebben (te kort zou minder nuttig zijn vanwege de korte levensduur, te hoog zou te weinig straling uitzenden en daarom zou de benodigde opslag te hoog zijn). Bovendien moet de straling snel afnemen, anders ontsnapt de energie uit het apparaat en wordt de generator zowel inefficiënt als gevaarlijk voor de bemanning of de elektrische systemen. Het $\alpha$-deeltje is groot en zwaar en vertraagt daarom zeer snel. Daarom blijft de vervalwarmte in het materiaal en kan het blok van $^{238}\text{Pu}$ zichzelf tot honderden °C verhitten.

Elke radioactieve emitter moet worden behandeld volgens de principes van stralingsbescherming. Dit stelt onder andere dat radio-isotopen alleen mogen worden gebruikt als er geen veiliger alternatief is. Een gewoon campinggasfornuis is dus een veel beter alternatief.

**6** **Bungeejumping** (Russian Physics Olympiads 2005 – 2017, som 41)




Plaatje met letters. $D$ is uiteindelijke evenwichtsstand.

(a) Energiebehoud, snelheid beneden is 0.

$$mgh = +\tfrac{1}{2}k(h-L)^2$$

Laagste punt, gegeven $a = 2g$:

$$2mg = k(h-L) - mg$$

Oftewel:

$$3mg = k(h-L)$$

Twee vergelijkingen, twee onbekenden.

$$(h-L) = \frac{3mg}{k}$$

$$mgh = \frac{9km^2g^2}{2k^2}$$

$$h = \frac{9mg}{2k}$$

Hieruit volgt: $k = 35\ \mathrm{N/m}$

En vervolgens: $L = 30\ \mathrm{m}$

(b) Krachtenevenwicht in punt D:

$$mg = kx_0$$

Dit levert: $x_0 = 20\ \mathrm{m}$

(c) De maximale snelheid van Ad is in punt $D$. (Pas op dat punt wordt de veerkracht groter dan de zwaartekracht en zal de snelheid dus afnemen.

Wederom energie beschouwing:

$$\tfrac{1}{2}mv_{max}^2 = mg(L+x_0) - \tfrac{1}{2}kx_0^2$$

Inleveren levert $v_{max} = 28{,}3\ \mathrm{m/s}$

(d) Van punt $B$ naar $C$ is een vrije val. Vanaf punt $C$ een harmonische trilling (met punt $C$ NIET een uiterste stand, punt $E$ daarentegen wel).

$$t_{BC} = \sqrt{\frac{2L}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{3g}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Voor de harmonische trilling geldt:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9g}{2h}}$$

$$t_{DE} = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Omdat $x_0 = A/2$ geldt dat voor $C$ naar $D$ er een fasehoek van $\pi/6$ is doorlopen.

De tijd daarvoor is dus:

$$t_{CD} = \frac{T}{12} = \frac{\pi}{18}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Totaal dus:

$$t_{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{\pi}{18}\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}} = 5{,}41\ \mathrm{s}$$

NB: De wortelterm is de tijd voor de vrije val! De term ervoor is >1.

**B1 Omhoog gooien**

De luchtweerstand zorgt voor een kracht in de tegenovergestelde richting als de beweging. Bij het omhoog gaan in dezelfde richting als de zwaartekracht, bij het naar beneden gaan in tegenovergestelde richting.
Bij het omhoog gaan zorgt de luchtweerstand ervoor dat de bal minder hoog komt dan zonder de luchtweerstand. Bij het naar beneden gaan zal geconvergeerd worden naar een constante snelheid. De grootte van de snelheid is dus op elke hoogte voor de naar beneden gaande bal dus kleiner dan de omhoog gaande bal. Het duurt dus langer om naar beneden te vallen.

**7 Wipwap** (Russian Physics Olympiads 2005 – 2017, som 62)

Kan met energiebeschouwing, zoals in aangegeven boekje staat.
Eenvoudiger:

$$\tau = F \cdot r = I\dot{\omega}$$

$$-2mg\frac{l}{2} = \left(m\left(\frac{L}{2} - \frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2} + \frac{l}{2}\right)^2\right)\dot{\omega}$$

$$-gl = \frac{L^2}{2}\dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{2gl}{L^2}$$

Oftewel: De hoekversnelling heeft een constante waarde om terug te keren naar de horizontale stand. De tijd die daarvoor nodig is (conform formule eenparig versnelde beweging):

$$\frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 = \alpha$$

$$t = \sqrt{\frac{\alpha L^2}{gl}}$$

De periode is dan 4X deze tijd omdat de andere drie delen van de trilling dezelfde tijd vergen.

**8 Proton van de zon**

De te berekenen tijd is het verschil in vluchttijd tussen een foton en het deeltje:

$$\Delta T = \frac{1}{v} - \frac{1}{c}$$

Het proton zal weinig last van het magnetisch veld hebben bij die snelheid en vliegt direct naar de aarde. De zwaartekracht effecten zijn verder verwaarloosbaar.

De snelheid van het proton verkrijgen we met: $\mathrm{E} = \gamma \mathrm{m_0 c^2} = \frac{\mathrm{m_0 c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

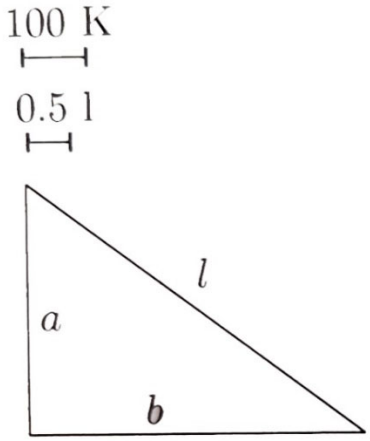
Daarin is $m_0c^2$ de rustmassa-energie van het proton, $m_p = 938{,}27$ MeV.

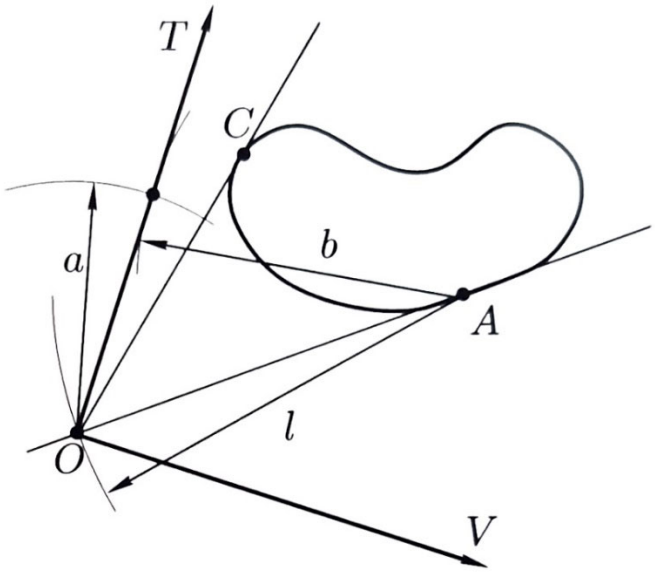
Dit alles invullen en substitueren levert op:

$$\Delta T = \frac{1}{c}\left(\frac{c}{v} - 1\right) = \frac{1}{c}\left[\left(1 - \frac{m_p^2}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right] = 833 \text{ s}$$

**9 Kelvin** (Russian Physics Olympiads 2005 – 2017, som 43)

(a) De ideale gaswet voor 1 mol gas: $p = R\,T/V$.
Het punt van laagste druk correspondeert dus met een minimale rico in het $T, V$-diagram door punt $A$ en de oorsprong. (Zie rechter figuur.)
Omdat beide schalen bekend zijn is er een afstand $l$ vanaf punt $A$ waarvoor geldt dat deze lengte $l$ de hypotenusa is van een driehoek met zijden $a$ en $b$ waarbij $a$ de afstand is tot de $V$-as (en correspondeert met een temperatuur van $400$ K) en $b$ de afstand tot de $T$-as (en correspondeert met een druk van $4$ L), zie de linker figuur. De $T$-as moet wel omhoog gaan, anders zou er in punt $A$ geen minimum zijn. De afstand $l$ is dus met de schalen te berekenen en de afstand gemeten vanaf punt $A$ levert dus de oorsprong.
Vervolgens met een passer een cirkel tekenen met straal $a$ vanuit de oorsprong en een cirkel met straal $b$ vanuit punt $A$ levert een snijpunt. Dat snijpunt ligt op de $T$-as. Zie de figuur.
In principe zou hetzelfde voor de $V$-as gedaan kunnen worden. Maar ook loodrecht op de $T$-as volstaat.



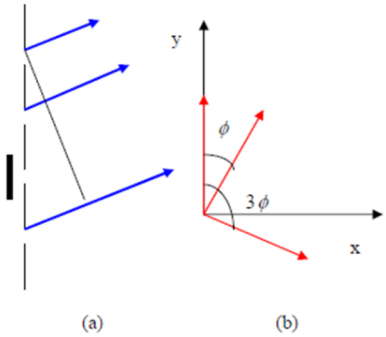

(b) In de figuur is punt $C$ het punt met maximale druk. De waarden zijn af te lezen.
Antwoord: $p_{max} \approx 4{,}75$ MPa

**10 Golfinterferentie**

(a) De spleten zelf geven minima op $d\,sin\,\varphi = n\lambda$, $n$ = 1, 2, 3, …
Tussen de maxima van de interferentie van de $N$ spleten zitten $N - 1$ extra minima met ertussen nog extra maxima
Voor de extra minima geldt $(d + D)\,sin\,\varphi = \frac{\lambda}{N}, \frac{2\lambda}{N}, \ldots$
Het eerste extra minimum ligt het dichtst bij het centrale maximum, dus $\varphi_1 = arcsin\left(\frac{\lambda}{(d+D)N}\right) = arcsin\,0{,}024 = 1{,}38^{\circ}$

(b) Sluit een spleet zoals op de tekening.
Noem het faseverschil tussen speet 1 en 2 φ die tussen spleet 1 en 4 is dan $3\varphi$
Zie ook het fasorplaatje.
Elke spleet heeft gelijke intensiteit, zeg 1.
dan geldt:

$$E_x = \sin\varphi + \sin 3\varphi$$
$$E_y = 1 + \cos\varphi + \cos 3\varphi$$




Intensiteit gaat met $E^2$
$I = (1 + \cos\varphi + \cos 3\varphi)^2 + (\sin\varphi + \sin 3\varphi)^2$
$= 3 + 2(\cos\varphi + \cos s\varphi + \cos 3\varphi)$
We zoeken een minimum, wat grafisch kan of met de afgeleide
$(\cos\varphi + \cos s\varphi + \cos 3\varphi)' = -\sin\varphi - 2\sin\{2\varphi\} - 3\sin\{3\varphi\} = 0.$
Met $\sin\varphi$ niet nul, krijgen we als oplossing: $6\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 1 = 0$
Met oplossing $\cos\varphi = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{6}$
Kleinste hoek die hier uit komt $\varphi = 127^{\circ}$

**11 Ladingen botsen**

De deeltjes zijn zo klein dat we kunnen zeggen dat ze tegen elkaar botsen als hun afstand gelijk is aan nul.
De deeltjes zijn gelijk, dus botsen op $L/2$.
Met Keplers derde wet kunnen we de tijd vinden die de deeltjes nodig hebben om bij het massamiddelpunt te komen. De wet geeft als 2 deeltjes rond hetzelfde massamiddelpunt bewegen via ellips of cirkel, met halve max-as $a_1$ en kleine as $a_2$ en baantijden $T_1$ en $T_2$ dat dan geldt:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

De banen zijn in feite ellipsen met kleine as nul en grote as $L/4$.
De helft van de omlooptijd is de tijd die we zoeken. Met Keplers derde wet, weten we dat die tijd gelijk is aan de helft van de tijd die de deeltjes nodig hebben in een cirkelbaan met straal $L/4$ om het massamiddelpunt.
We vinden dan met centripetaalkracht de elektrische kracht:

$$\frac{mv_0^2}{L/4} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon(2\cdot l/4)^2}$$

Voor de omlooptijd geldt:

$$T = \frac{2\pi L/4}{v_0}$$

Dat geeft dan:

$$\mathrm{T}^2 = \left(\frac{2\pi\mathrm{L}/4}{v_0}\right)^2 = \frac{\epsilon\mathrm{m}(\pi\mathrm{L})^3}{\mathrm{Q}^2}$$

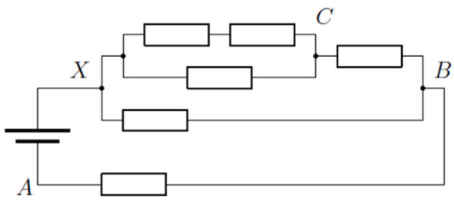
En voor de halve omlooptijd:

$$\mathrm{t} = \mathrm{T}/2 = \frac{\sqrt{\epsilon\mathrm{m}(\pi\mathrm{L})^3}}{\mathrm{Q}}$$

Wat ingevuld oplevert $t = 0{,}83$ s.

**12 Condensatoren**

(a) Nadat de spanningen constant geworden zijn, loopt er geen stroom meer door de condensatoren, dus kunnen die uit de schakeling gehaald.




Je houdt dan de schakeling hiernaast over.

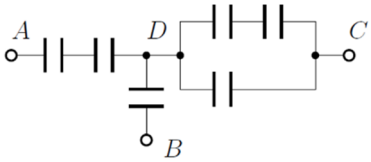
Dan geldt: $1/R_{XC} = 1/R + 1/(R+R) = \frac{3}{2}R \rightarrow R_{XC} = \frac{2}{3}R$

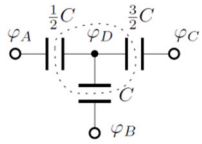
$1/R_{XB} = 1/R + \frac{1}{\frac{2}{3}R+R} \rightarrow R_{XB} = \frac{5}{8}R$

Voor de potentiaal geldt dan:

$U_B = \frac{R}{R_{XB}+R}U = \frac{8}{13}U$ en $U_C = U_B + \frac{R}{R_{XC}+R}(U - U_B) = \frac{11}{13}U$

(b) De potentiaal aan de uiteinden van het condensatorgedeelte liggen vast. Je kunt de schakeling hiernaast dan aanhouden, met de juiste potentialen aan de uiteinden. De schakeling kan zelfs nog verder vereenvoudigd worden met de rekenregels voor condensatoren.. **Tussen de stippellijnen is geen lading , dus (met $q = CU$ en $U_A = 0$)**



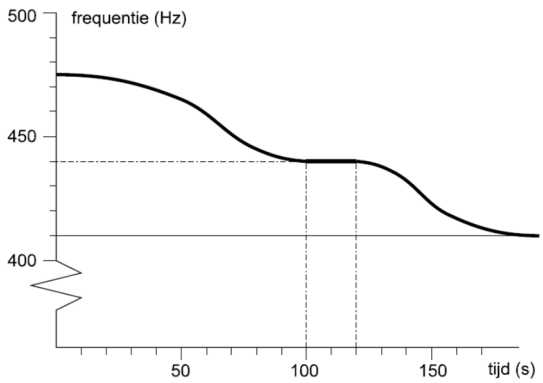

$\frac{1}{2}C(U_D - U_A) + \frac{3}{2}C(U_D - U_C) + C(U_D - U_B) = 0$

$U_D = \frac{1}{6}(U_A + 2U_B + 3U_C) = \frac{1}{6}(2U_B + 3U_C)$

$U_D = \frac{49}{78}U$

**B2 Hans in de bocht (SNON 1e ronde 1999)**

Het frequentie-diagram laat drie gedeelten zien: Het stuk waarbij de geluidsbron naar de bocht komt (de waargenomen frequentie is hier hoger dan die van de bron), het stuk waarbij de bron door de bocht gaat (de waargenomen frequentie is hier gelijk aan die van de bron, nl 440 Hz) en het stuk waarbij de bron zich verwijdert van de bocht (de waargenomen frequentie is hier lager dan die van de bron). De waargenomen frequentie door de stilstaande waarnemer in M is:




$$f_M = \frac{v}{v - v_B} f_B$$

Daaruit volgt dat de snelheid waarmee de bron zich beweegt:

$$v_B = v\left(1 - \frac{f_B}{f_M}\right) = 325\left(1 - \frac{440}{475}\right) = 23{,}9 \text{ m/s}$$

De bocht wordt in $120 - 100 = 20$ s doorlopen. Daaruit volgt de grootte van de straal van de bocht:

$$R = \frac{v_B t}{\frac{3}{2}\pi} = 102 \text{ m}$$