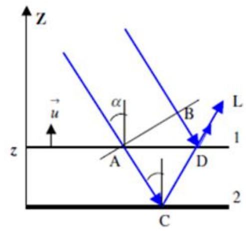
Natuurkunde Olympiade 2023-2 Theo1 uitwerking

1 Spiegel in optica

Op een bepaald moment is spiegel 1 op plek z ten opzichte van spiegel 2. Het weglengteverschil tussen lichtstralen BDL en ACL wordt dan gegeven door $\Delta x = AC + CD - BD$.



De figuur laat zien dat $AC = CD = \frac{z}{\cos\alpha}$

$$BD = AD\sin\alpha = 2z\tan(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{2z\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Het weglengteverschil wordt dan: $\Delta x = \frac{2z}{\cos(\alpha)} - \frac{2z\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2z\cos(\alpha)$

Er is constructieve interferentie als $2z\cos(\alpha) = m\lambda$, met $m = 1, 2, \ldots$

Voor de afstand afgelegd door spiegel 1 russen 2 pieken geldt dan $\delta z = \frac{\lambda}{2\cos(\alpha)}$

De tijd die daarmee is gemoeid is $T = \frac{\delta z}{u} = \frac{\lambda}{2u\backslash\cos(\alpha)}$

Dus $f = \frac{1}{T} = 346\text{Hz}$

2 Elektrische zeepbel

a. Het veld van de zeepbel is $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Voor de potentiaal op het oppervlak geldt dan

$$\phi_1 = \phi(r_1) = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0\,r_1}$$

Voor de lading geldt dan $Q = C_1\phi_1 = 4\pi\epsilon_0 r_1\phi_1 = 0{,}44\ \text{nC}.$

b. Het volume zeep moet gelijk blijven, dus

$$4\pi r_1^2\,d = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \implies r_2 = \sqrt[3]{3r_1^2 d} = 0{,}83\ \text{mm}$$

De lading Q bevindt zich nu op de buitenkant van de druppel met capaciteit $C_2 = 4\pi\epsilon_0 r_2$

$$\phi_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1\phi_1}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{r_1}{r_2}\phi_1 = \frac{r_1\phi_1}{\sqrt[3]{3r_1^2 d}} = 4{,}8\ \text{kV}$$

3 Geladen ballen aan een touwtje

In de evenwichtssituatie is de hoek tussen de touwen α.De kracht in de touwtjes compenseert de zwaartekracht en elektrische kracht op de bal. De ballen zitten op een afstand d van elkaar. Er geldt:

$f_z = mg$ en $F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q^2}{d^2}$

d is te berekenen door:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = l^2 - (l - \Delta h)^2 \Longrightarrow d = 2\sqrt{2l\Delta h - (\Delta h)^2}$$

F_z en F_e zijn loodrecht, dus $\tan\alpha = \frac{F_e}{F_z}$

Je kunt ook schrijven: $\cos\alpha = \frac{l-\Delta h}{l}$ en $\sin\alpha = \frac{d}{2l}$ en daarmee:

$$\tan\alpha = \frac{d}{2(l - \Delta h)}$$

De 2 formules combineren :

$$\frac{d}{2(l-\Delta h)} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon mgd^2}$$

$$\mathrm{m} = \frac{Q^2(l-\Delta h)}{2\pi\epsilon gd^3} = \frac{Q^2(l-\Delta h)}{16\pi\epsilon\, g(2l\Delta h-(\Delta h)^2)^{\frac{3}{2}}} = 120\ \mathrm{g}$$

4. Bernoulli

De snelheid bovenin is $v_0 = \frac{Q_0}{\pi R^2}$.

Op diepte h onder de kraan geeft de WvBvE: $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = hg$

$v = \sqrt{2gh + v_0^2}$.

De hoeveelheid die door een doorsnede stroomt (Bernoulli) moet gelijk blijven:

$$\pi r^2\ v\ =\ \pi r^2\sqrt{2gh\ +\ \frac{Q_0^2}{\pi^2 R^4}}$$

$$h = \frac{Q_0^2}{2\pi^2 gr^4} - \frac{Q_0^2}{2\pi^2 gR^4}\ =\ \frac{Q_0^2}{2\pi^2 g}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4}\right) = 0{,}0222\ \mathrm{m}$$

dus op 2 cm van de kraan splitst de straal in druppels

5 Ronddraaien

Energie- en (draai)impulsbehoud: $E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2$ en $L_0 = I\omega_0 + mRv$

Met $\omega = \frac{v}{R}$ en $I = \frac{1}{2}(2m)R^2$ hoeksnelheid en traagheidsmoment van de schijf.

In het midden is het traagheidsmoment van Leila nul maar impulsmoment is behouden, dus hoeksnelheid is groter $\omega_1 > \omega_0$, $L_1 = I\omega_1$, dus $\omega_1 = \omega_0 + \frac{mRv}{I}$

De kinetische energie is dan $E_1 = \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \omega_0 mRv + \frac{1}{2}\frac{m^2R^2v^2}{I}$

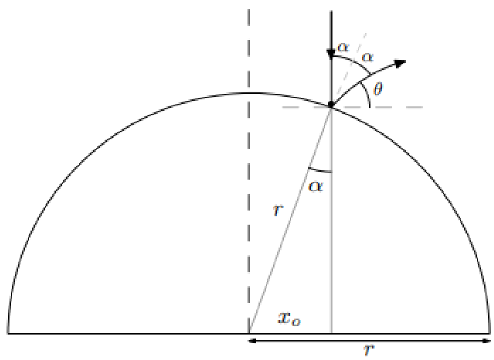
De verrichte arbeid is het verschil in energie voor en na

$$W = E_1 - E_0 = mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2R^2v^2}{I} - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{m^2v^2}{2m}$$

De gedane arbeid is dus $W = mv^2$

6 Bosu

De beweging is een vrije val, een botsing en een parabolische baan. We nemen het midden van de bolu als oorsprong.



De hoogte van de botsing is $y_0 = \sqrt{r^2 - x^2} = 0{,}285657\ \mathrm{m}$.

voor de snelheid na de botsing geldt dan:

$$mg(h - y_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$\mathrm{v_0}\ =\ \sqrt{2\mathrm{g}(\mathrm{h}-\mathrm{y_0})}\ =\ 4{,}461\mathrm{m/s}.$

Voor hoek θ kunnen we schrijven $90^0 = 2\alpha + \theta$. voor α schrijven we $\alpha = arcsin\frac{x}{r}$
dan $\theta = 90 - 2\mathrm{arcsin}\frac{x}{r} = 70{,}14$
$v_{0x} = v_0\, cos\,\theta$; $v_{0y} = v_0\, sin\,\theta$

Dan geldt: $x = x_0 + vt$ en $y = y_o + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. Met $t = 0$ op de botsing.

Op de grond geldt dan $0 = y_0 + v_0\, sin\,\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$. Daaruit bereken je $t = 0{,}9188$ s.

Nu alles invullen levert op $x = 1{,}44$ m.

7 Inductie magneet

ER loopt geen stroom, dus er is geen demping. Dan geldt
$U = -\frac{d\backslash phy}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -Bl\frac{dy}{dt} = -Blv.$

Met y de verplaatsing van de ring. Er geldt $y = r\, cos\, \omega t$ en vandaaruit $v = \frac{dy}{dt} =$
$-\omega r\, sin\, \omega t$
Verder $\mathrm{l} = 2\sqrt{(\mathrm{r}^2 - \mathrm{y}^2)} = 2\mathrm{r}\sqrt{(1 - \cos\omega\mathrm{t}^2)} = 2\mathrm{r}|\sin\omega\mathrm{t}|$
Dat geeft dan voor de potentiaal: $\mathrm{U} = 2\mathrm{Br\_2}\ \omega(\sin\omega\mathrm{t}\ |\sin\omega\mathrm{t}|$
Voor de amplitude gelst dan $U_A = 2Br^2\sqrt{\frac{k}{m}}$

Natuurkundeolympiade 2023-2 Theo2 uitwerking

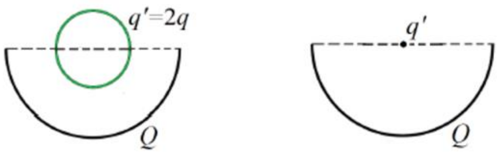
8 Lidar

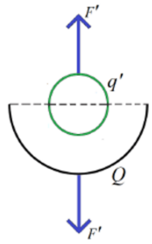
$h_1 = 40\text{cm} = c * \frac{t_1}{2};\ h_2 = 41{,}9\text{cm};\ h_3 = 34\text{cm} = c * \frac{t_3}{2}$
diepte water $d = h_1 - h_3 = \frac{c}{2} \cdot (t_1 - t_3)$; Tijd is $\Delta t = t_2 - t_3$

Je meet met lidar 7,9 cm en het is 6,0 cm, snelheid is daarmee $c_w = c \cdot \frac{6}{7{,}9} = 0{,}76c = 2{,}28 \cdot 10^8 \text{m/s}$

9 Statische halve bollen

Ga ervan uit dat de lading uniform over de halve bollen is verdeeld. Neem even aan dat de grote halve bol een bol met lading $q' = 2q$ bedekt als in de figuur

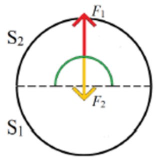




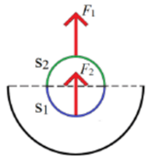
Dan kan de bol vervangen worden door een puntlading q'in zijn midden. Voor dat veld geldt: $E = \frac{kQ}{2R^2}$ met $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$

De kracht van de grote halve bol op de kleine bol is dan

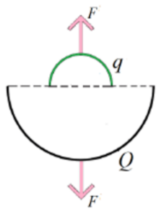
$F' = q' \cdot E = 2q \cdot \frac{kQ}{2R^2} = \frac{kQq}{R^2}$



Ga er nu vanuit dat de kleine halve bol is omgeven door de grote bol zoals in de figuur. De grote bol oefent geen kracht uit de kleine halve bol, dus de krachten F_1 en F_2 zijn even groot maar tegengesteld $F_1 = F_2$



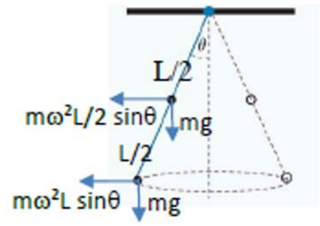
Omgekeerd, als we de kleine bol met de grote halve bol bekijken, is de kracht tussen de grote bol en de kleine onderste halve bol s_1 F_2 en op s_2 F_1. De totale kracht tussen de grote halve bol en de kleine bol is $F' = F_1 + F_2 = 2F_1$ of $F_1 = \frac{F'}{2}$



Daaruit kunnen we opmaken dat de kracht tussen de halve bollen gelijk is aan:
$F = \frac{\frac{kQq}{R^2}}{2} = \frac{kQq}{2R^2} = \frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 R^2}$ en dus onafhankelijk van r.

10 Stijve slinger

Het resulterende koppel moet nul zijn:



$$\frac{L}{2}\mathrm{mg}\,sin\,\theta + \mathrm{Lmg}\,sin\,\theta = \frac{L}{2}\mathrm{m}\omega^2\,sin\,\theta\,cos\,\theta + \mathrm{Lm}\omega^2\mathrm{L}\,sin\,\theta\,cos\,\theta$$

$$\mathrm{g} = \frac{5}{6}\omega^2\mathrm{L}\,cos\,\theta \Rightarrow \omega^2\mathrm{L} = \frac{6}{5}\frac{g}{cos\,\theta}$$

Verder voldoet de hoek α tussen de horizontaal en de kracht van de staaf op de massa in het midden aan:

$$tan\,\alpha = \frac{mg}{m\omega^2\frac{L}{2}sin\,\theta}$$

Combineren levert op:

$$\alpha = tan^{-1}\frac{2g}{\omega^2 L\,sin\,\theta} = tan^{-1}\frac{2g}{\frac{6}{5}\frac{g}{cos\,\theta}sin\,\theta} = tan^{-1}\left(\frac{5}{3}cot\,\theta\right)$$

11 Watertank

Antwoord: $13 \cdot A = k \cdot A = A_0$

De waterstroom geeft steeds een gelijke hoeveelheid water, dus:

$v \cdot A = v_0 \cdot A_0 \rightarrow v = k \cdot v_0$

$v = v_0 + gt; h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$

Van de formule van v kun je schrijven: $t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{(k-1)v_0}{g}$

Dan wordt de tweede formule:

$h = v_o\frac{(k-1)v_0}{g} + \frac{1}{2}g\frac{(k-1)^2 v_0^2}{g^2}$

Het resultaat is: $v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{k^2-1}} = 2{,}1\mathrm{m/s}$

12 RLC-circuit

Stroom is maximaal bij de resonantiefrequentie, dan geldt $Z = R$.

Voor een seriecircuit geldt $\mathrm{Z} = \sqrt{\mathrm{R}^2 + \left(\mathrm{L}\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ bij de resonantiefrequentie blijft dan over: $Z = R$.

Effectieve spanning is $U_e = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

Vermogen is dan $P = \frac{U_e^2}{R} = 52{,}9\ \mathrm{W}$.

13 Atoommodel

Het elektron beschrijf een cirkelbaan. Op het elektron werkt een middelpuntzoekende kracht. Deze wordt geleverd door de elektrische kracht:

$$F_{mpz} = \frac{mv^2}{r} = F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

Er geldt dus:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

Het impulsmoment van het elektron wordt gegeven door:

$$L = mvr = n\hbar$$

Oftewel

$$v = \frac{n\hbar}{mr}$$

Als we dit invullen in de formule voor het krachtenevenwicht, dan volgt:

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}$$

Invullen voor $n = 2$ levert $r = 2{,}1 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}$.

14 Vallende boom

De hoogte energie van de boom wordt omgezet in rotatie/kinetische energie.

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}I\omega^2$$

De boom is homogeen dus het zwaartepunt zit in het midden, oftewel: $\Delta h = \frac{1}{2}h$

Het traagheidsmoment van een staaf met een rotatie as door het midden wordt gegeven door:

$$I = \frac{1}{12}ml^2$$

Met Steiner volgt dat het traagheidsmoment om de rotatie-as aan het uiteinde wordt gegeven door:

$$I = \frac{1}{12}mh^2 + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mh^2$$

Dit combineren met $v = \omega \cdot h$ levert:

$$mg\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mh^2\left(\frac{v}{h}\right)^2$$

$$v = \sqrt{3gh}$$