

Permanente magneten (10 punten)

Sterke permanente magneten worden gemaakt van een NdFeB-legering die een zeer brede hysteresislus heeft, zodat de magnetisatie J constant kan worden verondersteld over een breed toepassingsgebied; in wat volgt nemen wij aan dat $J \equiv 1.5 \text{ T}/\mu_0$, waarbij $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ en dat de magnetisatie van alle permanente magneten homogeen is. *Magnetisatie wordt gedefinieerd als de volumedichtheid van het magnetisch dipoolmoment van de materie.*

Hint 1. De volgende vergelijking kan nuttig zijn:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Hint 2. Het magnetisch veld dat door een bolvormige magneet wordt opgewekt is identiek aan dat van een puntdipool. De magnetische velden die worden opgewekt door magneten van andere vorm worden alleen gelijkwaardig aan een puntdipoolveld bij afstanden die veel groter zijn dan hun diameter.

Hint 3. Elektrische en magnetische velden van elektrische en magnetische puntdipolen als functies van coördinaten en van het bijbehorende dipoolmoment zijn gelijksoortig, d.w.z. het ene kan uit het andere worden verkregen door het te vermenigvuldigen met een constante factor.

Hint 4. Het geïnduceerde veld ten gevolge van een randvoorwaarde kan altijd vervangen worden door één of andere configuratie van veldbronnen buiten de gegeven grenzen.

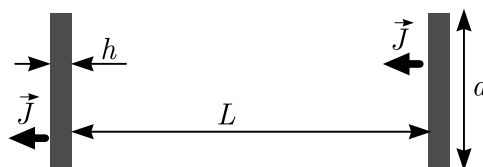
Deel A. Wisselwerking tussen magneten (4.5 punten)

Als de afstand tot een magneet veel groter is dan zijn grootte, kan het door hem veroorzaakte magnetische veld worden benaderd met het magnetische veld van zijn dipoolmoment $\vec{m}$,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp}).$$

Hierin is $r = |\vec{r}|$ en is het dipoolmoment ontleed in componenten evenwijdig aan en loodrecht op de straalvector getrokken van de dipool naar het waarneempunt, $\vec{m} = \vec{m}_{\perp} + \vec{m}_{\parallel}$.

- A.1** Bereken de grootte van de interactie kracht tussen twee coaxiaal geplaatste cilindrische magneten van diameter $d = 20 \text{ mm}$ en dikte $h = 2 \text{ mm}$, evenwijdig aan hun as gemagnetiseerd, als de afstand tussen de middelpunten van de magneten $L = 20 \text{ cm}$ is. Je mag aannemen dat $L \gg d, h$. 0.6pt

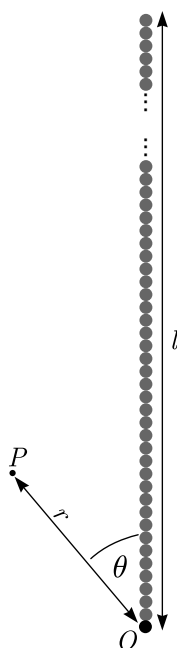


- A.2** Bij afstanden veel groter dan $\frac{h}{2}$ is het veld dat door de magneet uit opgave A.1 wordt opgewekt hetzelfde als dat van een cirkelvormige stroom I . Bereken I . 0.4pt

A.3 Bereken de interactiekracht tussen de magneten voor de opstelling van opgave A.1 als in plaats daarvan $L = 5 \text{ mm}$. Je mag aannemen dat $d \gg L \gg h$. 1.0pt

A.4 Identieke bolvormige magneten met diameter $\delta = 5 \text{ mm}$, die door magnetische aantrekkingskracht aan elkaar verbonden zijn, vormen een ketting. Wat is de maximale lengte van zo'n ketting die niet onder zijn eigen gewicht breekt als hij onder de bovenste magneet hangt? De dichtheid van NdFeB magneten is $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$. 1.0pt

A.5 Beschouw de ketting uit deel A.4. Leid een uitdrukking af voor de grootte van het magnetisch veld B in een punt P dat op afstand r ligt van een van de eindpunten O van de keten en de hoek θ tussen de ketting en de lijn OP (zie onderstaande figuur). Hierbij mag worden aangenomen dat $l \gg r$ en $r \sin \theta \gg \delta$ 1.5pt



Deel B. Interactie met ferromagneten (3.5 punten)

We nemen nu aan dat we naast de permanente magneten ook platen hebben die gemaakt zijn van een ferromagnetisch materiaal dat ook wel in transformatorkernen wordt gebruikt.

In de situaties binnen deze opgave, kan je ervan uitgaan dat het een constante maar zeer grote relatieve permeabiliteit heeft $\mu_r \sim 10^5$.

Hint 5. Grote permeabiliteit betekent dat magnetische veldlijnen nabij het buitenoppervlak van een voorwerp gemaakt van het materiaal bijna loodrecht op het oppervlak staan. Dit is vergelijkbaar met het gedrag van elektrische veldlijnen nabij het buitenoppervlak van een geleider.

B.1 Een bolmagneet uit onderdeel A.4 bevindt zich op een afstand $s = \delta$ van een dikke oneindige ferromagnetische plaat (zie het antwoordblad). De magnetisatie van de bol is loodrecht op de plaat gericht. Schets de veldlijnen in de doorsnede op het antwoordblad. In die figuur zijn drie punten (aangeduid met 1, 2 en 3) aangegeven; je moet de veldlijnen die door elk van deze punten gaan over hun volle lengte weergeven, dat wil zeggen zoveel als in de figuur past. 1.0pt

B.2 De bolmagneet wordt nu in direct contact gebracht met de plaat. Welke richting heeft de magnetisatievector van de bolmagneet bij een stabiel evenwicht? Kruis de juiste richting(en) aan in het overeenkomstige hokje op het antwoordblad. Onjuiste aankruisingen verlagen je score. 1.0pt
Wat is de normaalkracht tussen de plaat en de magneet?

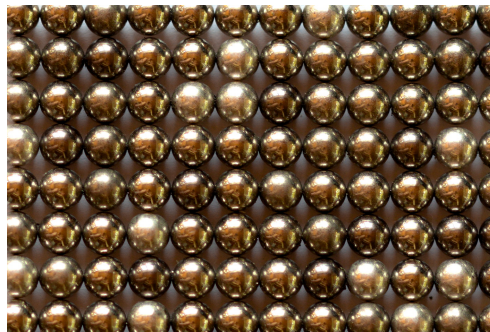
B.3 Nu wordt een magneet uit deel A.1 tussen twee dikke cirkelvormige ferromagnetische platen met diameter $D = 2d$ geplaatst, zodat de vlakke vlakken van de magneet tegen de platen worden gedrukt en alle drie de schijven coaxiaal zijn. Bereken de magnetische kracht F die op elke plaat werkt. 1.5pt
Hint: Je mag het magnetisch veld zowel buiten de ferromagnetische platen als buiten de ruimte tussen de platen verwaarlozen.

Deel C. (Anti)ferromagnetische materialen (2 punten)

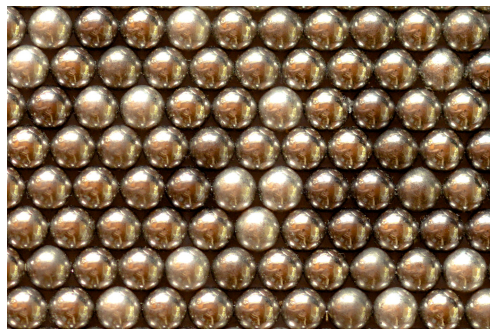
De magnetische eigenschappen van materialen zijn te danken aan de magnetische dipoolmomenten van elektronen en atoomkernen. Als de dipoolmomenten zich evenwijdig aan elkaar oriënteren, wordt het door hen opgewekte veld vergroot - dit zijn ferromagnetische materialen. Indien daarentegen voor elk dipoolmoment in de nabijheid een ander antiparallel dipoolmoment aanwezig is, heffen de velden elkaar op - dit zijn anti-ferromagnetische materialen.

In wat volgt beschouwen we een zeer groot aantal bolvormige magneten van deel A.4, gerangschikt op de knopen van een tweedimensionaal raster; zie **echte foto's van stabiele evenwichtsconfiguraties** hieronder. Neem aan dat alle magnetisatie vectoren in het vlak van de figuur liggen. Neem in je berekeningen alleen naaste-buurt interacties in beschouwing (in de figuur van C.1 heeft elke magneet vier naaste burens, in de figuur van C.2 zijn dat er zes).

- C.1** Toon de magnetisatierichtingen van de magneten in de figuur hieronder. 0.8pt
Je hoeft niet te bewijzen dat de door jou voorgestelde configuratie de enige mogelijkheid is. Je moet echter wel aantonen dat de door jou voorgestelde configuratie inderdaad stabiel is.
Bereken de energie die nodig is om één magneet uit dit raster te trekken vanuit ergens in het midden van het raster, aangenomen dat de andere magneten stil blijven staan.
Komt deze configuratie overeen met ferromagnetische of antiferromagnetische materialen?



- C.2** Beantwoord dezelfde vraag als in vraag C.1 maar nu voor de configuratie zoals te zien is in de onderstaande figuur. 1.2pt



Permanente magneten (10 punten)

Deel A. Wisselwerking tussen magneten (4,5 punten)

A.1 (0.6 pt)

(Formule) $F =$

(Waarde) $F =$

A.2 (0.4 pt)

Uitleg (schets, indien nodig):

(Formule) $I =$

(Waarde) $I =$

A.3 (1.0 pt)

(Formule) $F =$

(Waarde) $F =$

A.4 (1.0 pt)

(Formule) $l =$

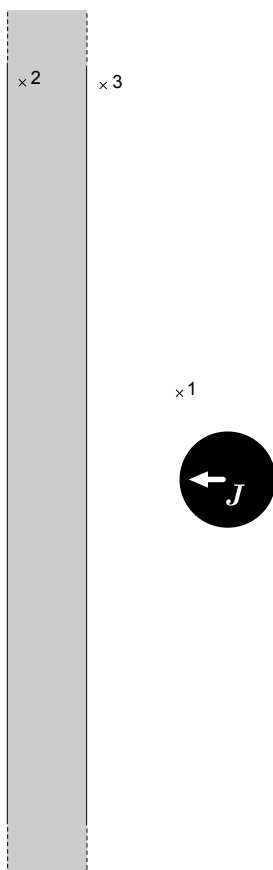
(Waarde) $l =$

A.5 (1.5 pt)

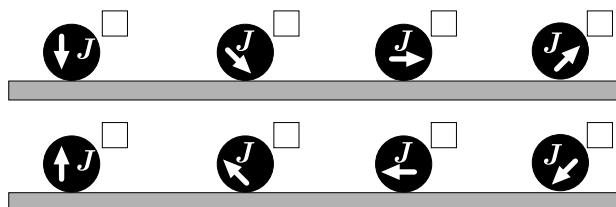
(Formule) $B =$

Deel B. Interactie tussen ferromagneten (3.5 punten)

B.1 (1.0 pt)



B.2 (1.0 pt)



(Formule) $F =$

(Waarde) $F =$

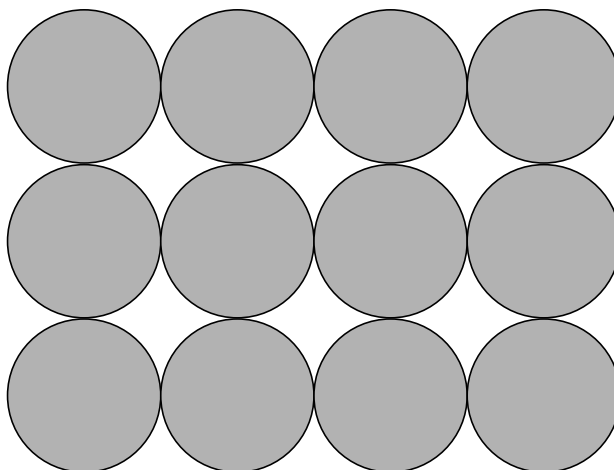
B.3 (1.5 pt)

(Formule) $F =$

(Waarde) $F =$

Deel C. (Anti)ferromagnetische orde (2 punten)

C.1 (0.8 pt)

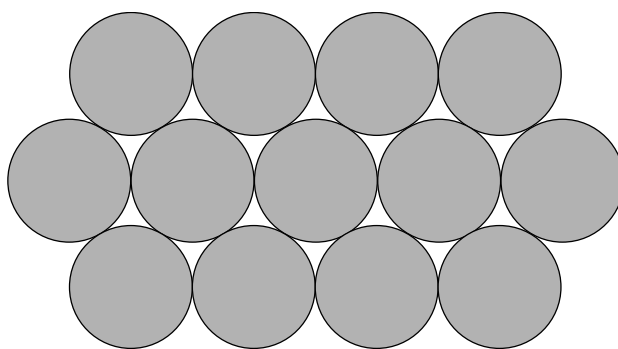


Onderstreep de juiste classificatie:
ferromagnetisch; antiferromagnetisch

(Formule) Benodigde Energie =

(Waarde) Benodigde Energie =

C.2 (1.2 pt)



Onderstreep de juiste classificatie:
ferromagnetisch; antiferromagnetisch

(Formule) Benodigde Energie =

(Waarde) Benodigde Energie =

James Webb Space Telescope (12 points)

Deze vraag gaat over de fysica van de James Webb-ruimtetelescoop. Licht van een ster valt op de primaire spiegel, met een oppervlakte van $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$, en weerkaatst op een secundaire spiegel. De brandpuntsafstand van het systeem is $f = 130 \text{ m}$. Het licht wordt geconcentreerd in de ISIM (Integrated Science Instrument Module), die de CCD-camera's bevat.

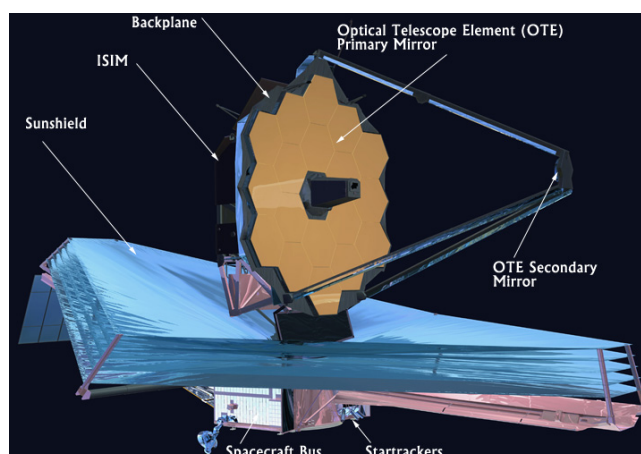


Image Credit: NASA

Deel A. Beeld van een ster (1.8 punten)

De dichtstbijzijnde rode reus is 89 lichtjaar van ons verwijderd, heeft een temperatuur van $T_{\text{star}} = 3600 \text{ K}$ en een diameter van $d_o = 1.7 \times 10^{11} \text{ m}$.

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.1 | Bereken de diameter van een scherp beeld van de ster op het beeldvormend oppervlak van de CCD-camera. | 0.4pt |
| A.2 | Geef een schatting van de diameter van een diffractiemaximum op het beeldoppervlak van de CCD-camera. Ga uit van een golflengte van $\lambda = 800 \text{ nm}$, de golflengte met de sterkste intensiteit van de rode reuzenster. | 0.4pt |
| A.3 | Als de CCD niet wordt gekoeld en alleen warmte kan verliezen door straling van de bovenkant van het beeldvormingsoppervlak, wat zou dan de evenwichtstemperatuur van de CCD zijn op de plaats van het beeld van de rode reuzenster? Veronderstel dat het oppervlak van de CCD een zwarte straler (blackbody) is. Geef een formule en een numerieke schatting. | 1.0pt |

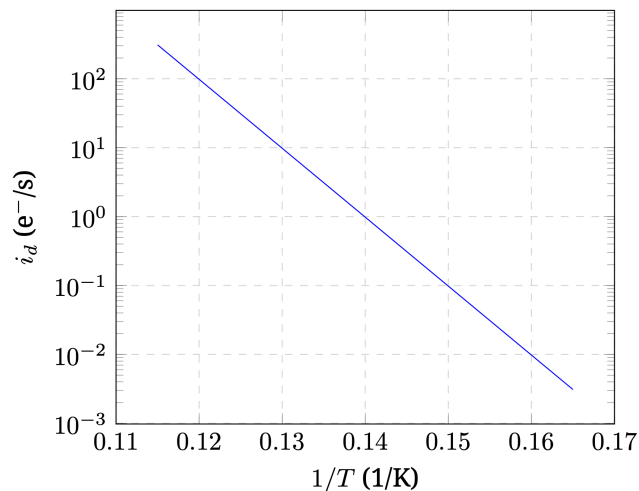
Deel B. Fotonen tellen (1.8 punten)

De absorptie van een foton door de CCD-camera resulteert in de emissie van een elektron in het apparaat. Dit gebeurt alleen als het foton voldoende energie heeft om een elektron te exciteren over een energieverval (energy gap) ΔE_g . Veronderstel dat elk foton met voldoende energie daarin slaagt. Er is ook lekkage van elektronen over het genoemde energieverval (energy gap), veroorzaakt door de temperatuur van de CCD-camera; dit is de donkere stroom i_d en wordt gemeten in het aantal elektronen per

seconde. Het is een functie van de temperatuur volgens

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/6k_B T}. \quad (1)$$

where i_0 is a constant.



De grafiek laat zien hoe de donkerstroom varieert met de temperatuur. De eenheden voor donkerstroom, e^-/s , moeten worden gezien als het tellen van een aantal elektronen per seconde.

B.1 Geef op basis van de grafiek van de donkerstroom een schatting van de orde van grootte van de temperatuur van een verre bron van thermische fotonen die net in staat zou zijn een elektron op de pixel te exciteren. 0.4pt

De elektronen worden verzameld in een condensator, en na een belichtingstijd τ worden de elektronen geteld. Er zijn drie belangrijke bronnen van onzekerheid in het proces:

- een vaste onzekerheid in het telproces die afleesruis wordt genoemd;
- een Poissonverdelings-fout in verband met de donkerstroom,
- en een Poissonverdelings-fout in verband met de gedetecteerde inkomende fotonen.

Poissonverdelings-fouten zijn gelijk aan de vierkantswortel van het aantal tellingen dat met een proces samenhangt. Het gemeten aantal fotonen is gelijk aan het aantal elektronen in de condensator, min het aantal elektronen in verband met de donkerstroom.

B.2 Geef een uitdrukking voor de totale onzekerheid in de telling σ_t , als er een uitleesruis σ_r , een donkerstroom i_d , een inkomende stroom fotonen p en een belichtingstijd τ is. 0.4pt

Neem voor de overige vragen in dit deel aan dat de belichtingstijd $\tau = 10^4 \text{ s}$ is en de uitleesruis steeds gelijk is aan $\sigma_r = 14$.

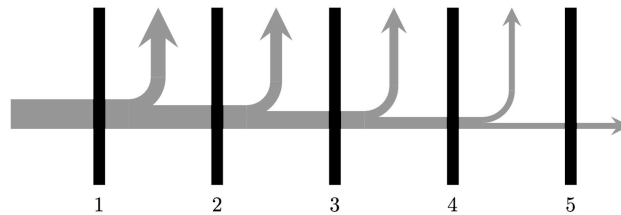
B.3 Ga uit van een bedrijfstemperatuur van $T_p = 7.5$ K. Bereken de minimale fotonstroom p zodat de telling van fotonen tien maal de telonzekerheid bedraagt. 0.5pt

B.4 Aangenomen dat alle fotonen juist in staat zijn een elektron over de bandgap op te wekken, wat is dan de intensiteit van de bron van fotonen die in B.3 op de primaire spiegel is gevonden? Druk je antwoord uit in W/m^2 . 0.5pt

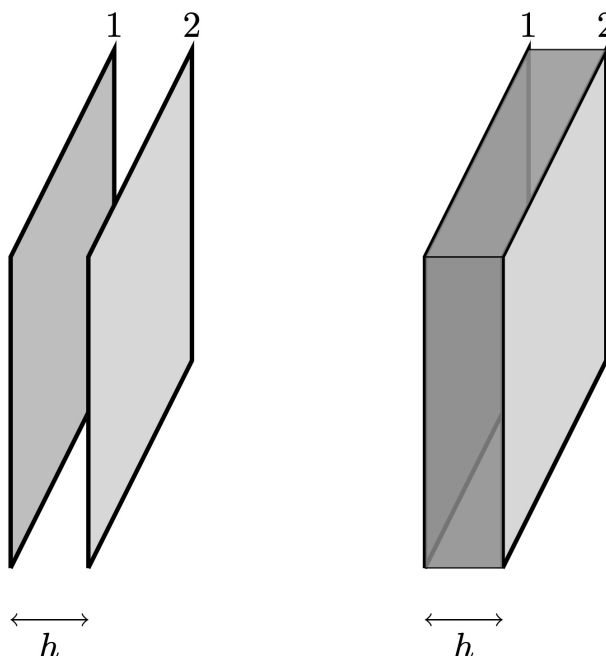
Deel C. Passieve koeling (4,4 punten)

Een infrarood CCD camera moet op een lage temperatuur worden gehouden. Het eerste hulpmiddel is een schild ter bescherming tegen de straling van de zon.

Het zonneschild bestaat uit vijf gescheiden reflecterende lagen in dunne vellen (zwart); de stralingsenergie (grijs) van de zon valt op het eerste vel links, en tussen elk paar vellen ontsnapt wat energie.



Schema van de energiestroom: de verticale lijnen (zwart) zijn de bladen, de energiestroom (grijs) is van links naar rechts, maar tussen de bladen stroomt wat energie omhoog de ruimte in.



Links staat een eenvoudig model van twee naast elkaar liggende bladen 1 en 2, gescheiden door een afstand h . De bladen zijn niet verbonden en de omtrek is open naar de ruimte. Veronderstel dat de platen evenwijdig zijn. Thermische straling kan worden uitgewisseld tussen de platen, en thermische straling kan ontsnappen door de opening in de omtrek. Rechts is die opening gearceerd om het te helpen visualiseren.

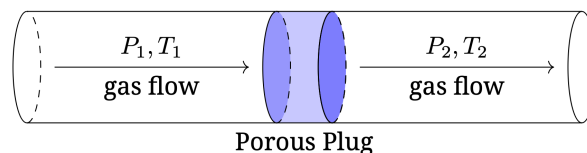
Ga uit van de volgende vereenvoudigingen:

- De vellen zijn vierkant en hebben elk een oppervlakte van 200 m^2 .
- De platen zijn evenwijdig en langs de omtrek gescheiden door $h = 25 \text{ cm}$.
- De platen hebben een constant emissiviteit (de mate van effectiviteit in het uitstralen van energie als warmtestraling) $\epsilon \ll 1$. Veronderstel dat alle reflecties van plaatoppervlakken diffuus zijn.
- De platen zijn dun en de temperatuur op het voorvlak en het achtervlak is gelijk en uniform.
- De fractie van de door een plaat uitgestraalde stralingsstroom die door de aangrenzende plaat wordt geabsorbeerd, is $\alpha \leq 1$. Dit betekent dat indien het onderste vel boven een hoeveelheid warmte Q_1 uitstraalt naar het bovenste vel, het bovenste vel een hoeveelheid αQ_1 van het onderste vel zal absorberen.
- De fractie van de stralingsstroom die uit de omtrekspleet tussen twee platen wordt uitgestoten, wordt benaderd als βQ_{12} waarbij αQ_{12} de netto flux tussen de twee platen is. Dit komt erop neer dat het warmteverlies naar de ruimte tussen twee platen evenredig is met de netto warmte-uitwisseling tussen de platen. Dit is een ruwe benadering voor dit probleem.
- De achtergrondtemperatuur van de ruimte is verwaarloosbaar.

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.1 | Leid uitdrukkingen af voor de evenwichtstemperaturen van de eerste plaat en de vijfde plaat in termen van de invallende zonnestralingsintensiteit I_0 , de constanten α en β , en eventueel benodigde fysische constanten. Om uw uitdrukking te vereenvoudigen, kunt je extra constanten definiëren in termen van α en β , enz. | 2.4pt |
| C.2 | Leid numerieke schattingen voor α en β af uit de informatie over de plaatgeometrie, uitgaande van een emissiviteit $\epsilon = 0.05$. Je wordt aangemoedigd het rechthoekige doosmodel van de platen hierboven te overwegen, waarbij de omtrek effectief fungeert als een perfecte absorber van stralingsenergie. | 1.6pt |
| C.3 | Bepaal numeriek de temperaturen van plaat 1 en plaat 5. De zonne-intensiteit is $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$. | 0.4pt |

Deel D. Cryo-koeler (4 punten)

De laatste trap van het koelsysteem koelt de CCD-camera rechtstreeks. Een koelsysteem bestaat uit een gesloten cyclus. Deze heeft een toevoerleiding die heliumgas met constante druk P_1 door een sponzachtige poreuze plug voert naar een leiding met constante druk P_2 die het gas naar de CCD voert. Het heliumgas gaat vervolgens door een pomp voordat het terugkeert naar de toevoerleiding.



Heliumgas dat links bij welbepaalde druk P_1 en temperatuur T_1 wordt toegevoerd, wordt door de plug geperst tot welbepaalde druk P_2 en temperatuur T_2 , waar het rechts wordt afgevoerd.

Terwijl het gas door de poreuze plug beweegt, wordt viskeuze wrijving met de smalle wanden van de kanalen in de spons een belangrijk effect; tijdens het proces wordt echter geen warmte overgedragen van of naar het gas. De bulksnelheid van het gas in gebied 2 is slechts marginaal groter dan de bulksnelheid in gebied 1.

Helium is in deze opstelling geen ideaal gas maar blijft in het proces in de gasfase.

- | | | |
|------------|---|-------|
| D.1 | Beschouw een mol gas die van links naar rechts door de stop gaat. Vul de tabel op je antwoordblad aan door ">" of "<" te schrijven om aan te geven welke hoeveelheid groter moet zijn, "=" om aan te geven welke hoeveelheid gelijk moet zijn, of "?" als het niet mogelijk is om zonder extra informatie te weten welke hoeveelheid groter of gelijk is. | 1.0pt |
| D.2 | Noem een behouden grootheid die is samengesteld uit U (inwendige energie), P (druk) en V (volume) wanneer een mol gas door de plug beweegt; laat zien hoe je deze behouden grootheid hebt afgeleid. | 0.6pt |

Op de antwoordbladen staan grafieken van de inwendige energie per massa tegen het volume per massa voor helium met isothermen en lijnen van constante entropie.

D.3	Ga uit van $V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ en $T_2 = 7.5 \text{ K}$. Gebruik de grafiek om een numerieke waarde te vinden voor de behouden grootte die je in deel D.2 gevonden hebt. Toon de constructie in de grafiek!	1.4pt
------------	--	-------

D.4	Bepaal de maximaal mogelijke temperatuur voor T_1 . Toon de constructie op de grafiek!	0.8pt
------------	--	-------

D.5	Uitgaande van je waarde voor de maximale T_1 , gevonden in D.4, bepaal een numerieke waarde voor P_1 .	0.2pt
------------	--	-------

James Webb Space Telescope (12 punten)

Deel A. Beeld van een ster (1.8 punten)

A.1 (0.4 pt)

Numerieke waarde van d_{image} =

A.2 (0.4 pt)

Numerieke waarde van d_{diff} =

A.3 (1.0 pt)

Formule voor T_{image}

Numerieke waarde van T_{image} =

Deel B. Fotonen tellen (1.8 punten)

B.1 (0.4 pt)

Numerieke waarde van T_{source} =

B.2 (0.4 pt)

Formule voor σ_t

B.3 (0.5 pt)

Numerieke waarde van p =

B.4 (0.5 pt)

Numerieke waarde van intensiteit

Deel C. Passieve koeling (4.4 punten)

C.1 (2.4 pt)

Uitdrukking voor T_1

Uitdrukking voor T_5

C.2 (1.6 pt)

Numerieke schatting van α =

Numerieke schatting van β =

C.3 (0.4 pt)

Numerieke waarde van $T_1 =$

Numerieke waarde van $T_5 =$

Deel D. Cryo-koeler (4 punten)

D.1 (1.0 pt)

Grootheid	eerste geval	vergelijk met ">", "<", "=", or "?"	tweede geval
Interne energie	U_1		U_2
Temperatuur	T_1		T_2
Entropie	S_1		S_2
Druk	P_1		P_2
Volume	V_1		V_2

D.2 (0.6 pt)

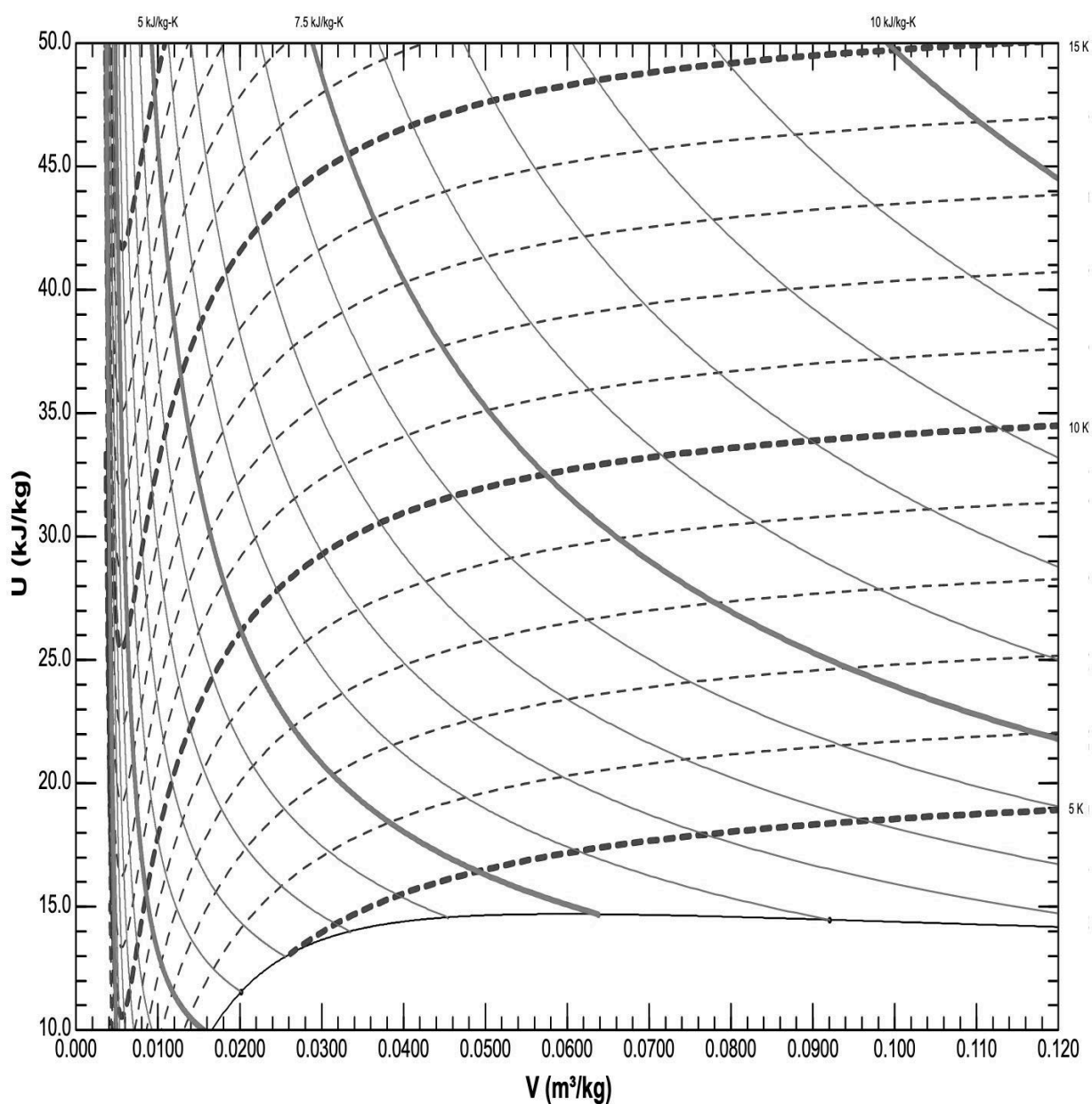
Formule voor behouden grootheid

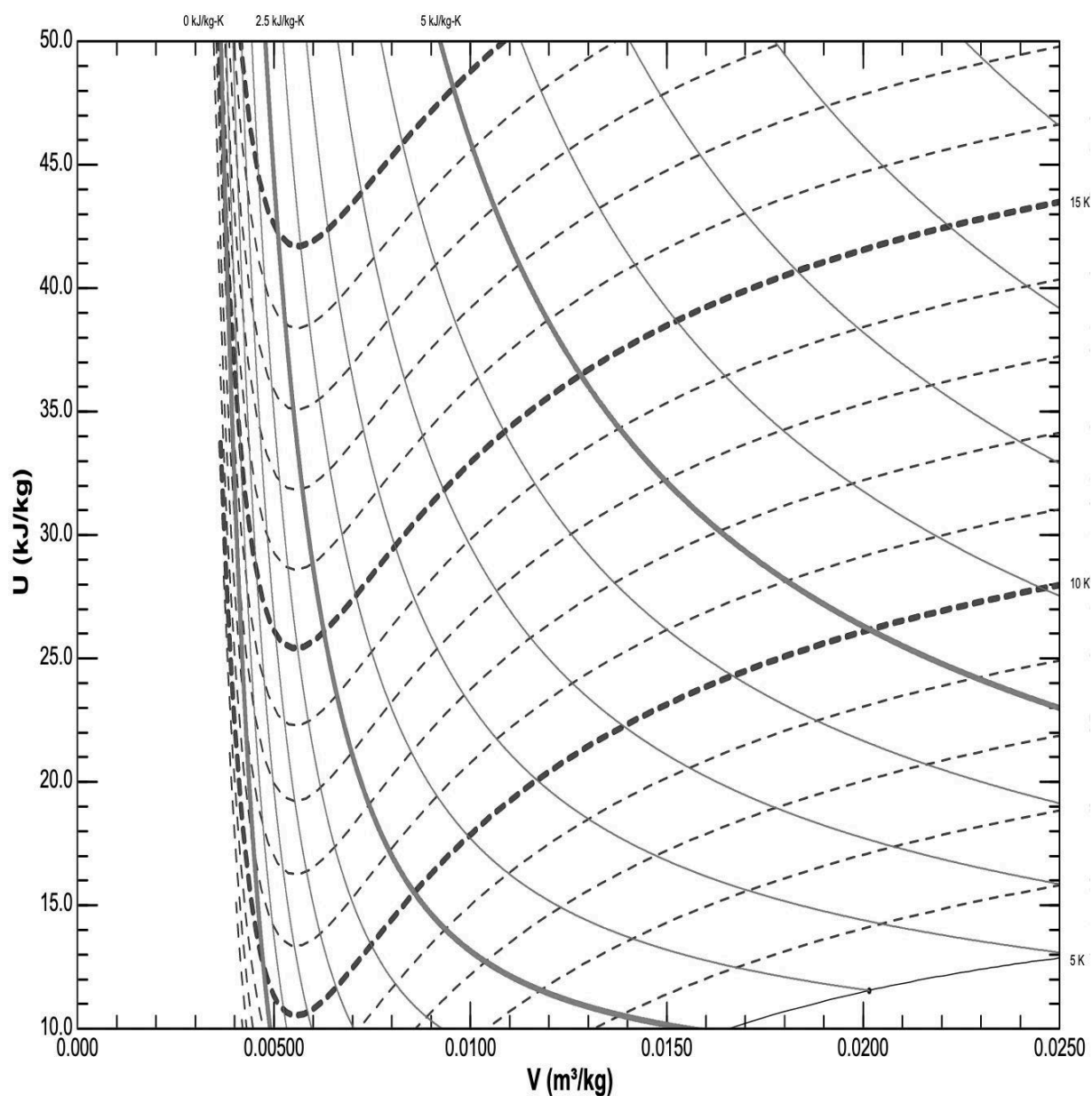
D.3 (1.4 pt)

De ononderbroken krommen (die naar beneden gaan met toenemend volume) zijn constante entropie S ; de waarden voor de vetgedrukte krommen staan bovenaan.

Gestippelde krommen (stijgend met toenemend volume) zijn constante temperatuur T ; de waarden voor de vetgedrukte krommen staan rechts.

Interne energie (per kg) U staat op de verticale as; volume (per kg) V staat op de horizontale as.



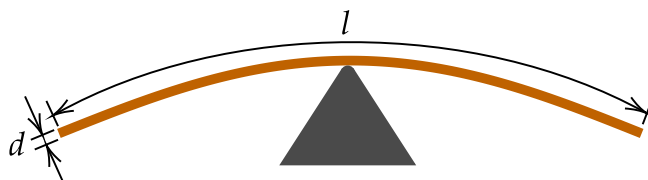
D.4 (0.8 pt)**D.5** (0.2 pt)Numerieke waarde voor $P_1 =$

Schaalwetten (8 punten)

Schaalwetten beschrijven de functionele relatie tussen twee fysische grootheden die met elkaar schalen over een significant interval. Deze functionele relatie kan een machtswet zijn, maar er zijn ook andere mogelijkheden. Vaak liggen exacte uitdrukkingen buiten bereik, maar kunnen schaalwetten toch worden afgeleid.

Deel A. Spaghetto (2.0 punten)

- A.1** Een spaghettirootje met een diameter d wordt horizontaal in het midden in evenwicht gehouden, zie de figuur. Als $d = 1$ mm, dan breekt het rietje onder zijn eigen gewicht als de lengte meer dan $l = 50$ cm wordt. Wat is de maximale lengte l' van een strootje met een diameter $d' = 1$ cm voordat het onder het eigen gewicht breekt? 2.0pt



Deel B. Zandkasteel (2.0 punten)

- B.1** Het gemiddelde korrelvolume van grofkorrelig (coarse-grained) zand is 10 keer zo groot als dat van fijnkorrelig (fine-grained) zand. Nat fijnkorrelig zand en nat grofkorrelig zand hebben beide een optimaal watergehalte (d.w.z. je mag uitgaan van de maximale sterkte van de constructies van dit zand) en daarmee worden twee cilinders van precies dezelfde vorm en grootte gemaakt. De sterkte van elke cilinder wordt getest door deze tussen twee parallelle platen te plaatsen. De cilinder van het grofkorrelig zand gaat kapot als de kracht die wordt uitgeoefend om de platen samen te drukken $F_c = 10$ N is. Hoe groot is de kracht F_f die nodig is om de cilinder van fijnkorrelig zand kapot te maken? Je mag de effecten van de zwaartekracht verwaarlozen. 2.0pt

Deel C. Interstellair reizen (2.0 punten)

- C.1** Het ruimteschip van een interstellaire expeditie reist met een constante eigen versnelling met een grootte van $g = 10 \text{ m/s}^2$, d.w.z. dit is de versnelling van het ruimteschip in het inertiaal stelsel waarin het initieel in rust is. 2.0pt
- De passagiers moeten binnen hun verwachte resterende levensduur van 50 jaar naar de aarde kunnen terugkeren. De maximale afstand die het ruimteschip tot de Aarde kan overbruggen is d .
- Als de versnelling wordt opgevoerd tot $g' = 15 \text{ m/s}^2$, kan het ruimteschip een grotere afstand d' bereiken.
- Wat is de verhouding d'/d ?

Hint 1. Je kunt de relativistische snelheidsadditieformule gebruiken, maar er zijn ook andere benaderingen.

Hint 2. Het kan zijn dat je te maken krijgt met hyperbolische functies die als volgt gedefinieerd zijn:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Hint 3. Afhankelijk van je aanpak, kan je één of meer van deze integralen nodig hebben:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{atanh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{asinh} x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C,$$

Hierin zijn $\operatorname{asinh} x$ en $\operatorname{atanh} x$ de inverse functies van de respectievelijke hyperbolische functies.

Deel D. Dat zinkend gevoel (2.0 punten)

- D.1** Een massieve houten bal met straal r_0 drijft in water. Als we wrijvingseffecten verwaarlozen zou de frequentie (bij kleine uitwijkingen) ω_0 zijn, maar door viskeuze wrijving, na een verticale verplaatsing, is de frequentie van afnemende oscillaties in werkelijkheid $0.99\omega_0$. Wat is de minimale straal $r_{\min}$ van een in water drijvende houten bal die bij verplaatsing nog kleine oscillaties ondergaat? 2.0pt
- Hint: de viskeuze weerstand van een lichaam is o.a. evenredig met zijn snelheid ten opzichte van de vloeistof en met de viscositeit η van de vloeistof waarin het zich beweegt. De eenheid van viscositeit is $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$.

Schaalwetten (8 punten)

Deel A. Spaghetto (2.0 punten)

A.1 (2.0 pt)

$$l' =$$

Deel B. Zandkasteel (2.0 punten)

B.1 (2.0 pt)

$$F_f =$$

Deel C. Interstellair reizen (2.0 punten)

C.1 (2.0 pt)

$$d'/d =$$

Deel D. Dat zinkend gevoel (2.0 punten)

D.1 (2.0 pt)

$$r_{\min}/r_0 =$$