Uitwerkingen

1 Plutonium (5)

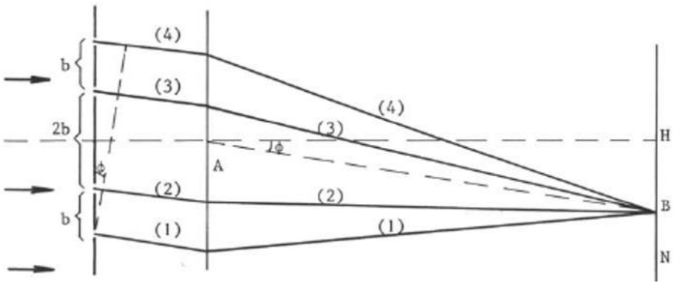
2 $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_{\frac{1}{2}}}}$, $A = \frac{dN}{dt} = -N_0 \cdot \frac{\ln(2)}{t_{\frac{1}{2}}} \cdot 2^{-\frac{t}{t_{\frac{1}{2}}}}$. Voor $t = 0$ is dan $A = -N_0 \cdot \frac{\ln(2)}{t_{\frac{1}{2}}}$.

1 m^2 plaat bezit $N_0 = \frac{M}{m_0} = \frac{\rho \cdot dikte \cdot 1}{m_0}$. De helft van de deeltjes vervalt richting de andere kant van de plaat, dus delen door factor 2.

Flux = $\Phi = \frac{\rho \cdot dikte \cdot \ln(2)}{2 m_0 t_{\frac{1}{2}}} \approx 2{,}36 \cdot 10^{13}$ m^{-2}s^{-1} .

Er is geen rekening gehouden met absorptie in de plaat.

3 Interferentie (5)

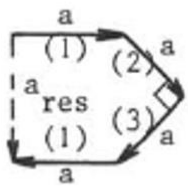


a. In H is het licht van elk der spleten in gelijke fase. Als je de amplitude van één spleet gelijk an a stelt is de amplitude in H dus $4a$.

b. Het verschil in optische weglengte v=tussen straal (1) en (2) bedraagt $b sin(\theta) \approx b\theta = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 5{,}4 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 0{,}54\ \mu\mathrm{m} = 1\frac{1}{8}$.

Het licht van (2) arriveert dus in B mt een fase, die $2\pi \cdot 1\frac{1}{8}$ rad achter is op de fase van het licht van (1), ofwel $\frac{\pi}{4}$ rad.

Het licht van (3), resp (4) arriveert in B met fase $\frac{3}{4}\pi$, resp π achter op de fase van (1). De amplitude in B is dan $a\sqrt{2}$, zie figuur.

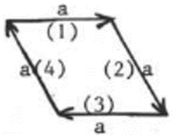


Dan geldt: $I_B = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4a}\right) \cdot I_H = \frac{1}{8} I_H$.

c. We berekenen de hoek Ψ, die AN maakt met AH. Eerst HB berekenen.
Deze is gelijk aan . $AH \cdot \tan(\phi) \approx AH \cdot \phi = 5{,}4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1{,}08 \cdot 10^{-3}$m.
Dus $HN = 2{,}08 \cdot 10^{-3}$m.
$\Psi \approx \tan(\Psi) = \frac{HN}{AH} = \frac{2{,}08 \cdot 10^{-3}}{5{,}4}$

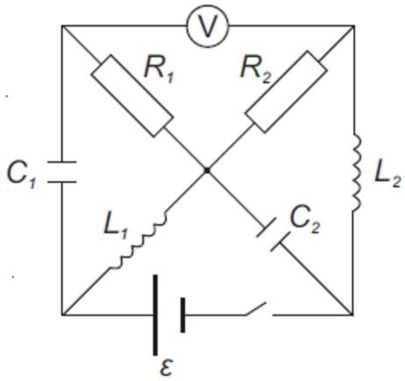
Het optisch weglengteverschil tussen (1) en (2) is $b \cdot \sin(\Psi) \approx b\Psi = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2{,}08 \cdot 10^{-3}}{5{,}4} = 1{,}04 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = 1{,}04\ \mu\mathrm{m} = 1\frac{1}{6}\ \lambda$. Het bijbehorend faseverschil in b is dus $2\pi \cdot 1\frac{1}{6}$ ofwel $\frac{1}{3}\pi$.

Voor (3) en (4) in B kom je soortgelijk uit op resp π en $\frac{4}{3}\pi$ in fase achter op die van (1)
We zien aan de figuur dat de amplitude, en dus ook de intensiteit in N 0 (nul) is.



3 RLC-circuit (5)

(a) De condensatoren kun je nu beschouwen als een open schakelaar en de spoelen als gewone draden. De voltmeter is ideaal, er loopt geen stroom door R_1 en de voltmeter geeft de spanning over R_2 aan en dat is gelijk aan ϵ.



(b) De C's kunnen niet direct hun spanning veranderen en de L's niet hun stroomsterkte. Daar loopt dus nog steeds een stroom $\frac{\epsilon}{R_2}$ en ze fungeren als stroombronnen.
Spanning over R_2 is dan ϵ.(+ naar centrum circuit) De stroom van L_1 gaat ook door R_1, De spanning is dan $\frac{\epsilon R_1}{R_2}$ (+bij centrum). De voltmeter wijst nu negatief t.o.v. de vorige $\epsilon(1-\frac{R_1}{R_2})$ met de gegevens ingevuld -2ϵ.

(c) Net na openen schakelaar was C_1 ongeladen. (parallel aan R_1 zonder stroom en C_2 had spanning ϵ. Door L_1 en L_2 liep een stroom $\frac{\epsilon}{R_2}$. De voltmeter kan er uit, en dan heb je twee gescheiden circuits. De energieformules $CU^2/2$ en $LI^2/2$ geven in het linkercircuit $\frac{L_1\epsilon^2}{2R_2^2}$ ingevuld $L\epsilon^2/2R^2$, de energie door R_1 gedissipeerd.
Voor het rechtercircuit kan dan gelden $C\epsilon^2/2 + LI^2/2$.

4 Satelliet (5)

(a) $F_{mpz} = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv_0^2}{r_0}$

(b) Behoud van impulsmoment
$I_0\omega_0 = I_1\omega_1 \rightarrow mv_0r_0 = mvr \rightarrow v = v_0\dfrac{r_0}{r}$

(c) $F_{mpz} = \frac{mv^2}{r} = m\frac{\left(v_0\frac{r_0}{r}\right)^2}{r} = m\frac{v_0^2r_0^2}{r^3}$
De grootste kracht is dus bij de kleinste straal, straal R dus.
Dus volgt: $F_{max} = m\frac{v_0^2r_0^2}{R^3}$
(Dit levert in principe 4 voorwaarden op: voor massa, snelheid, beginstraal en satellietstraal.

(d) Arbeid is verandering in kinetische energie
$W = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)$

5 Snelheidsverdeling in een gas (ronde 3 1995) (5)

5. De maximale waarde van $f(v)$ vind men als: $\frac{d}{dv} f(v) = 0$ zodat:

$$A.(3v^2 e^{-\alpha v^2} - v^3 2\alpha v e^{-\alpha v^2}) = Av^2 e^{-\alpha v^2}(3 - 2\alpha v^2) = 0 \rightarrow \alpha = \frac{M}{2RT} = \frac{3}{2v^2}$$

De snelheid waarvoor de verdelingsfunctie maximaal is, is:

$$v = \frac{0{,}21}{\frac{30}{360} \cdot \frac{1}{250}} = 630 \text{ m/s}, \quad \text{zodat: } M = \frac{3}{2v^2} \cdot 2RT = 0{,}031.$$

6 Waterstofatoom (5)

Dimensie analyse a.d.h.v. formule

$R = ke^{\alpha}\varepsilon_0^{\beta}h^{\gamma}m^{\delta}$

In een tabel (ε_0 is lastige met eenheid F erin):

		kg	m	s	C
e	α				1
ε_0	β	-1	-3	2	2
h	γ	1	2	-1	
m	δ	1			
R			1		

Resultaat:

$0 = -\beta + \gamma + \delta$

$1 = -3\beta + 2\gamma$

$0 = 2\beta - \gamma$

$0 = \alpha + 2\beta$

Uit de 4^e en 3^e vergelijking: $\beta = -\alpha/2$ en $\gamma = -\alpha$

Invullen in 2^e vergelijking levert: $\alpha = -2$

Daarna de rest: $\beta = 1, \gamma = 2$ en $\delta = -1$

Oftewel:$R = k\frac{\varepsilon_0 h^2}{me^2}$

Invullen waarden met $k = 1$ levert: $R = 1{,}7 \cdot 10^{-10}\text{m}$

Correcte waarde is $R = 5{,}3 \cdot 10^{-11}\text{m}$ komt vanwege $k = 1/\pi$

Antwoorden 2022 ronde 3 nr 2

7 Statische elektriciteit (4)

a. $V = (\frac{Q}{4\pi\epsilon_0})(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

b. $W = \frac{1}{2}QV$

c. $W = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2)$, met $V(\vec{r})$ een oplossing van $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$; dus $V \propto Q \rightarrow W \propto Q^2$.

8 Biljartbal (4)

$mv_0 = F\Delta t$ (stoot)

$I\omega_0 = \Delta L = \tau\Delta t = Fh\Delta t = hF\Delta t$

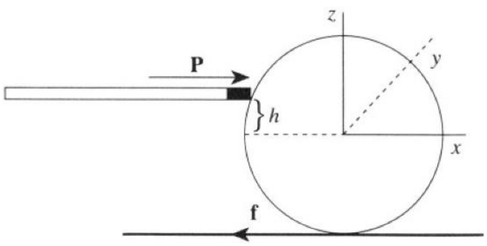
Voor een bol geldt $I = \frac{2}{5}mR^2$

Er geldt $v_0 = \omega_0 R$ om zonder slippen te rollen

Dan $\frac{F\Delta t}{m} = \frac{hF\Delta t}{I}R$

Hieruit volgt: $h = \frac{2}{5}R$

Dus stoot op een hoogte van $x = \frac{7}{5}\ R$



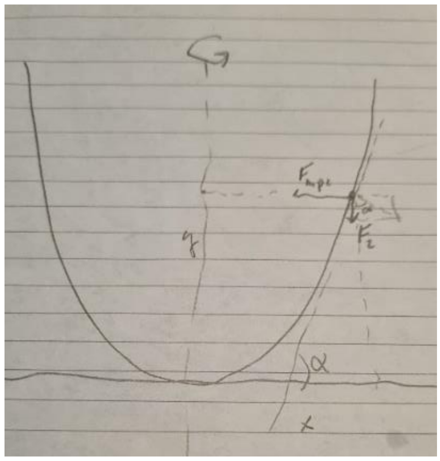
9 Rond draaiende vloeistof (4)

Neem een deeltje op de rand van de vloeistof, die is daar in relatief evenwicht. $F_z = mg$ en $F_{mpz} = m\omega^2 x$.

Deeltje blijft op gelijke hoogte, dus kracht loodrecht op oppervlak ter plekke. $tan(\alpha) = \frac{F_{mpz}}{F_z}$ dat is ook de helling ter plekke en dus $\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} = \frac{m\omega^2 x}{mg}$.

Dat levert: $y = \int \frac{m\omega^2 x}{mg} dx = \frac{\omega^2}{2g} x^2$.

Oppervlak is dus een parabool.



10 Stuiterend ballen (5)

(a) De tijd voor punt B is voor beide ballen gelijk.

Eerst bal B:

Verticaal: $h_B = \frac{1}{2}gt^2$ dus $t = \sqrt{\frac{2h_B}{g}}$

Horizontaal: $x_B = v \cdot \sqrt{\frac{2h_B}{g}}$

Nu bal A, eerste deel vergelijkbaar aan B, daarna met lagere (verticale) snelheid:

$$v \cdot \sqrt{\frac{2h_A}{a}} + 2v \cdot \sqrt{2k \cdot \frac{h_A}{a}} = v \cdot \sqrt{\frac{2h_B}{a}}$$

$(1 + 2\sqrt{k})\sqrt{h_A} = \sqrt{h_B} \rightarrow \sqrt{h_A} = \sqrt{h_B}\ /(1 + 2\sqrt{k})$.

(b) Hetzelfde idee, tijd blijft gelijk, dus:

$$v \cdot \sqrt{\frac{2h_A}{a}} + 2v \cdot \sqrt{2k \cdot \frac{h_A}{a}} + 2v \cdot \sqrt{2k \cdot \frac{kh_A}{a}} + \cdots = v \cdot \sqrt{\frac{2h_B}{a}}$$

$\sqrt{h_A} \cdot (1 + 2\sum_{n=1}^{N}(k^n) = \sqrt{h_B}$.

11 Vliegtuignavigatie (4)

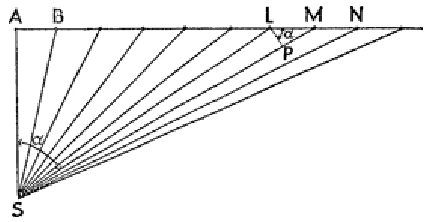
(a) $\theta = 0$: De signalen zijn in fase dus verdubbeling van de intensiteit.
$\theta = \pi/2$: Uitrekenen golflengte van de signalen met $\lambda = c/f$ levert $\lambda = 25\ \mathrm{m}$. Omdat de zenders $100\ \mathrm{m}$ uit elkaar staan ($= 4\lambda$) zijn ook nu de signalen in fase, dus verdubbeling van de intensiteit.

(b) Bij voldoende afstand kan aangenomen worden dat de signalen evenwijdig lopen.
Ook nemen we aan dat vanuit linksboven en linksonder aanvliegen (in het plaatje) symmetrisch is, en dat vliegtuig van links komt aanvliegen.
Dan volgt voor het weglengteverschil: $x = l \sin\theta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$
Invullen van waarden:

n	$\sin\theta$	θ
0	0,125	7,2°
1	0,375	22°
2	0,625	38,7
3	0,875	61°
4	>1	Nvt

(c) Stel dat dat een afstand x is.
Dan volgt: $\sqrt{x^2 + l^2} - x = \frac{\lambda}{2}$
Wortel wegwerken en invullen van getallen: $x = 394\ \mathrm{m}$

12 Geluid langs een hek (4)
(naar Minnaert)



(a) Het geluid vanuit S bereikt eerst A, dan B, enzovoorts. Hier is sprake van interferentie en het geluid kaatst op de spijlen terug, bij A en B terug naar S is het weglengte verschil erg klein en dus de teruggekaatste golflengte.

(b) Bij L, M en N nadert $\sin(\alpha)$ naar 1 en is de afstand tussen de spijlen ongeveer de golflengte, hier dus 17 cm, Het weglengteverschil is dan 34 cm. M et een golfsnelheid van een 320 m/s komt de frequentie dan uit op een 1000 Hz.

13 Fietsband (5) (ronde 3 2006)

Adiabatisch, dus $p_2 V_2^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma} \rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 1\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{5}{7}} = 0{,}25\ \mathrm{L}$

met $\gamma = \frac{7}{5}$ vanwege de twee-atomigheid, wat twee extra vrijheidsgraden oplevert.

De werkelijkheid is complexer: voor een twee-atomig molecuul verwacht je in eerste instantie dat C_p/C_v = 9/7. Dat voor zuurstof en stikstof is C_p/C_v bij kamertemperatuur inderdaad ongeveer 1.40 is komt door dat een van de vrijheidsgraden (de vibratie) "niet meedoet". Voor zwaardere twee-atomige gassen zoals I_2 benadert C_p/C_v de waarde 9/7; voor waterstof bij lage temperatuur gaat C_p/C_v richting 5/3 alsof het een een-atomig molecuul is.

Ook voor moleculen met nog meer atomen blijkt C_p/C_v in het algemeen significant groter te zijn dan te verwachten is op basis van het theoretische aantal vrijheidsgraden. Quantummechanica is nodig om goed te verklaren wat de waarde is.

Met dank aan Sytze Brandenburg

Voor de druk geldt: $p = \frac{c}{V^\gamma}$ waarbij de constante kan worden afgeleid uit de begincondities.

De verrichte arbeid kan worden geschreven als:

$$W = -\int p dV = -p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV = -p_1 V_1^\gamma \left. \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right|_{V_1}^{V_2}$$

$$W = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

$$W = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{2/5} \left[(4,0)^{\frac{2}{5}} - 1 \right] = 185 \text{ J}$$

Hier geldt:

$$p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma \rightarrow nRT_2 V_2^{\gamma-1} = nRT_1 V_1^{\gamma-1} \rightarrow$$

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 300 \left(\frac{1}{0,25} \right)^{\frac{2}{5}} \approx 520 \text{ K}$$