

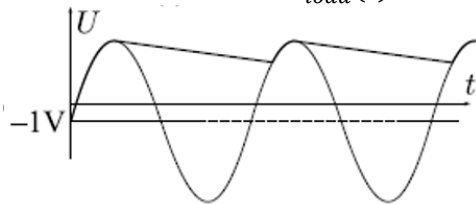
2^e RONDE Natuurkunde Olympiade 2022

UITWERKINGEN

1 Gelijkrichter (6 punten) (ES-2008)

(a) Since none of the DC current through the load can come from the capacitor, all must come through the diode. Hence, the average current through the diode is also $I = 2 \text{ mA}$, and the average power dissipation is obtained by multiplying it with the diode voltage $u = 1 \text{ V}$: $P = 2 \text{ mW}$. 1 pt

(b) If the diode is open, $U_{load}(t) = U_0 \cos(\omega t) - u$. If the diode is closed [i.e. $U_0 \cos(\omega t) < U_{load}(t) + u$], the capacitor discharges through the load. However, the relative change of the voltage of the capacitor has to be small (otherwise $\Delta I/I$ would not be small), The respective load voltage as a function of time is sketched in the Figure. So, we can use the above written Kirchoff's law with $U_{load}(t) \approx I \cdot R$, hence $U_0 = IR + u = 21 \text{ V}$. 2 pt



(c) The change of the voltage of the capacitor during the discharge cycle can be estimated as $\Delta U = \Delta Q/C$, where the capacitor's charge drop $\Delta Q = I \cdot t$, and t is the discharge time. Since the discharge cycle occupies almost all the period (see Figure), we can use $t \sim 1/\nu$. Further, $\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta Q}{CU} = \frac{\Delta Q}{CIR} = \frac{1}{CR\nu}$. Hence, $C \geq 100/R\nu = 200 \mu\text{F}$. 2 pt

(d) Initially, the capacitor is empty, so that the charge flowing through the capacitor during the first cycle is $Q = CIR$. Hence, the average power $P_1 = Q\nu v = CIR\nu v = 200 \text{ mW}$. 1 pt

2 Schieten met ballen (5 punten)

a. Before the collisions, the balls achieve the velocity

$u = \sqrt{2gh}$. The first collision is between the large ball and Ground; the velocity of the large ball reverses direction. Let

us consider the second collision in the system of the center of mass which is approximately the same as the large ball's system of reference. In that system, the small ball approaches

with velocity $u + u = 2u$, and after the collisions departs with the same velocity. In the laboratory system, the velocity is

$$2u + u = 3u = 3\sqrt{2gh}.$$

b. We use the same method as previously. Let designate

the velocity of the i -th ball before the $i + 1$ -st collision

by v_i . Then, in the system of the i -th ball, the $i + 1$ -t ball approaches and departs (after the collision) with the velocity

$v_i + u$; in the laboratory system, the departing velocity is

$$v_{i+1} = (v_i + u) + v_i = 2v_i + u$$

Bearing in mind that $v_i = u$, we find that $v_2 = 3u, v_3 = 7u, v_4 = 15u$ etc,

$v_N = (2^N - 1)u$. So $v_N = (2^N - 1)\sqrt{2gh}$. Hence

$$N = \lceil \log_2 \left(1 + \frac{v_N}{\sqrt{2gh}} \right) \rceil = 11$$

Here, $\lceil \dots \rceil$ denotes the ceiling function i.e. rounding up.

Each nex: ballis· 10 times less massive than the previous

One, so that the lowest ball must have a mass equal to

$$M_N \cdot 10^{N-1} = 1 \cdot 10^{10} \text{ kg.}$$

3 Lichtstraal in een druppel (5 punten)

Er geldt: 1) $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta$

$$2) \quad \Phi = 4\beta - 2\alpha$$

Φ maximaal: $\frac{d\Phi}{d\alpha} = 0$

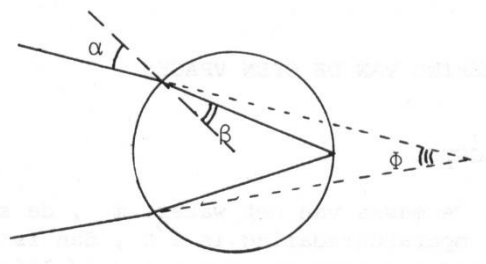
differentiëren van 2): $\frac{d\Phi}{d\alpha} = 4 \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} - 2 = 0 \rightarrow \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{2}$

differentiëren van 1): $\cos \alpha = n \cdot \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{n}{2} \cdot \cos \beta$

berekening van α :

$$\sin^2 \alpha = n^2 \cdot \sin^2 \beta = n^2 - n^2 \cdot \cos^2 \beta = n^2 - 4 \cdot \cos^2 \alpha = n^2 + 4 \cdot \sin^2 \alpha - 4$$

$$\text{dus } 3 \cdot \sin^2 \alpha = 4 - n^2 \text{ zodat } \sin^2 \alpha = \frac{4 - n^2}{3} \text{ en } \alpha = \arcsin \left(\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \right)$$



4 Licht door spleten (4 punten)

(a) Bij een enkele spleet geldt voor de minima:

$$\sin(\theta) = \frac{k\lambda}{d} \quad \frac{1}{2} \text{ pt}$$

Terwijl bij de kleine hoeken hier sinus en tangens wel gelijk te stellen zijn

$$\tan(\theta) = \frac{s}{l} = \frac{k\lambda}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{sd}{kl} \quad 1 \text{ pt}$$

Voor het minimum geldt hier dat $s = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ (m)}$

Invullen geeft voor de golfengte:

$$\lambda = 5,63 \cdot 10^{-7} \text{ (m)}. \quad \frac{1}{2} \text{ pt}$$

(b) Voor maximum geldt $\sin \alpha = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{4\lambda} = 0,25$

Dan geldt voor de tangens dat deze gelijk is aan 0,258. De afstand d voor een maximum t.o.v de nulde orde is dan

$$d = x \tan \alpha \quad 1 \text{ pt}$$

En de twee eerste orde liggen dan $2d$ uit elkaar. 1 pt

5 Magnetten 5 punten)

Er zijn drie krachten die op de hangende magneet werken:

de neerwaarts gerichte zwaartekracht mg , de trekkracht T , die is gericht langs de draad, en de horizontale magnetische kracht F_m .

Daar de hoek van de draad klein is, is de T

bijna gelijk aan mg , zodat zijn horizontaal projectie wordt $-(x/l)mg$, 1pt

waarbij l de lengte van de draad is en $x = 1 \text{ cm}$

(de verplaatsing ten opzichte van de uitgangspositie). De

netto. horizontale kracht $F = F_m - \left(\frac{x}{l}\right)mg$. Op het

evenwichtspunt $F = 0$. Het evenwichtspunt

is stabiel als een kleine (virtuele) verplaatsing Δx

aanleiding geeft tot een terugkerende kracht

$$\Delta F = \Delta F_m - \frac{\Delta x}{l} mg. \quad 1pt$$

die naar het evenwichtspunt moet duwen

Stel $F_m = kd^{-n}$ waarbij k een onbekende

evenredigheidscoëfficiënt is,. Dan is

$$\Delta F_m = F'_m(d)\Delta d = \frac{kn}{d^{n+1}}\Delta x$$

omdat $\Delta d = -\Delta x$. En dus

$$\Delta F = \left(\frac{kn}{d^{n+1}} - \frac{mg}{l}\right)\Delta x \quad 1pt$$

In het grensgeval van verlies van stabiliteit (dat

wordt beschreven door dit probleem) geldt $\Delta F = 0$. Dus

hebben we twee vergelijkingen met twee onbekenden (n en

k):

$$k \setminus d^n - \frac{xmg}{l} = 0, \frac{kn}{d^{n+1}} - \frac{mg}{l} = 0; \quad 1pt$$

dit kan herschreven worden als

$$\frac{k}{d^n} = \frac{xmg}{l}, \frac{kn}{d^{n+1}} = \frac{mg}{l}$$

Als we de overeenkomstige zijden van de twee

Vergelijkingen delen, krijgen we $d/n = x$, dus

$$n = d/x = 4. \quad 1pt$$

6 Coax-kabel (4 punten)

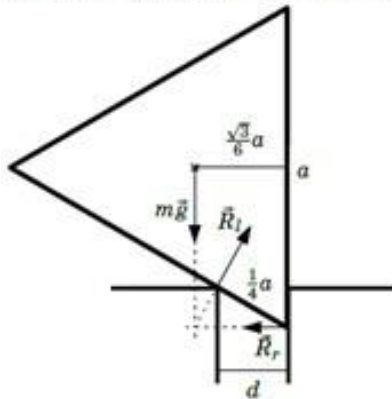
1. (a) $\vec{E} = E(R)\hat{R}$; $E(R) = 0$ voor $R > b$; $E(R) = Q/2\pi\epsilon_0 RL$ voor $a < R < b$; $E(R) = QR/2\pi\epsilon_0 a^2 L$ voor $R < a$. 1 pt
 (b) $U = (Q^2/4\pi\epsilon_0 L)(\ln(b/a) + 1/4)$ 2 pt
 (c) $V = (Q/2\pi\epsilon_0 L)(\ln(b/a) + 1/2)$, onafhankelijk van z omdat \vec{E} radieel gericht is. 1 pt

7 Een stabiel prisma (5 punten)

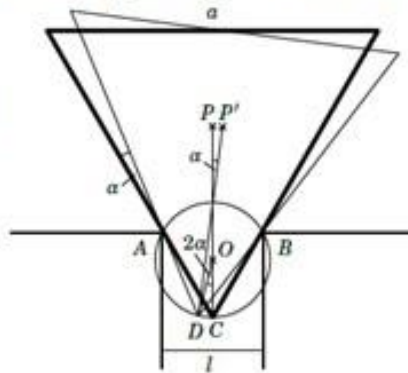
i) The prism is acted on by three forces: reaction force \vec{R}_l from the left-hand table, directed perpendicularly to the prism's face; reaction force \vec{R}_r from the right-hand table, directed horizontally (with its point of action to be determined yet); and gravitational force $m\vec{g}$, directed vertically and applied at the triangle's centre. (Considering a planar triangular cross-section of the prism is enough.)

On the verge of falling out, the force \vec{R}_r is applied at the lower corner of the triangle. If a body in equilibrium is acted on by three forces, then their lines of action must intersect at one point. This is because otherwise the torque of one of those forces would not be zero with respect to the intersection of the lines of action of the two other forces.

As the distance between the triangle's centre and its side is $\frac{\sqrt{3}}{6}a$, the distance between the points of action of \vec{R}_l and \vec{R}_r is $\frac{\sqrt{3}}{6}a \cos 30^\circ = \frac{1}{4}a$. Thus, $d = \frac{1}{4}a \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}a$.



ii) Let the corners be denoted by A and B , and the tip of the prism (at its equilibrium position) by C . Let us consider a small rotation of the prism (assuming it remains in contact with the corners). The trajectory of the tip is a circle ascribed around the triangle ABC (it follows from the property of the inscribed angles because the $\angle ACB$ remains equal to 60°). The radius of that circle $r = l/\sqrt{3}$; its centre will be denoted by O . Once the prism rotates by angle α , so that the new position of the tip will be D , the central angle $\angle COD = 2\alpha$. Hence, the tip is raised by $r - r \cos(2\alpha) \approx 2r\alpha^2$. The height of the centre of mass P of the prism is raised because the tip is raised, and lowered because the vertical projection of the segment CP is reduced by $|CP|(1 - \cos \alpha) \approx |CP|\alpha^2/2$. Here, $|CP| = a/\sqrt{3}$. So, the original position is stable if $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2/2 < 2\frac{l}{\sqrt{3}}a^2$, hence $l > \frac{1}{4}a$.

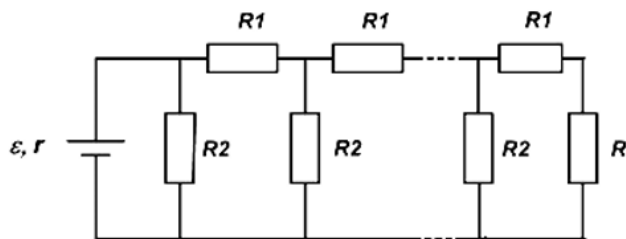


i) 2 pt

ii) 3 pt

8 Weerstanden (5 punten)

We moeten dit slim aanpakken, anders wordt het veel rekenwerk...



Zie figuur 4. De stroomsterkte in R_x is I . Dan stroomt door R_2

$$I_2 = \frac{R_x + R_1}{R_2} I \quad 1 \text{ pt}$$

Dan levert de bron dus:

$$I_B = \frac{R_x + (R_1 + R_2)}{R_2} I$$

De tweede wet van Kirchhoff rond de buitenkant levert dan:

$$\frac{R_x + (R_1 + R_2)}{R_2} I \cdot r + I \cdot (R_1 + R_2) = \epsilon \quad 1 \text{ pt}$$

Door invullen van R_1 en R_2 vinden we voor I :

$$I = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon}{(R_x + 3)}$$

$$r = 3 \text{ ohm, dus dan: } I = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\epsilon}{(R_x + r)} = \frac{\epsilon_1}{R_x + r} \quad 2 \text{ pt}$$

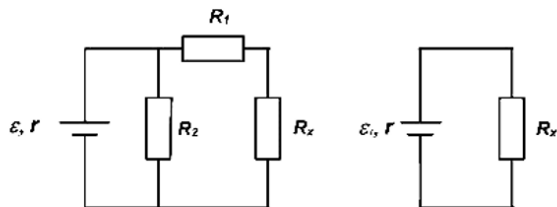


Fig.4

Fig.5

Fig 4 is dus gelijk aan fig 5 met dan $\epsilon_1 = \left(\frac{2}{3}\right)\epsilon$.

Deze truc doe je 17 keer en dat levert op:

$$I = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{17}\epsilon}{(R_x + r)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{17} \cdot 10}{17 + 3} = 05 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{17} = 0,0005 \text{ A.} \quad 1 \text{ pt}$$

9 2X Lens (4 punten)

(a) Met de lensformule volgt:

$$\frac{v}{b} = \frac{v}{f} - 1$$

Dus: $x = v$ en $y = v/b$

1 pt

Asafsnede ($v = 0$) levert $q = -1$

Oplossen:

$$\frac{v}{b} = 0$$

levert $v = f$ oftewel $p = f$

½ pt

De rico is $1/f$

½ pt

(b) De sterktes van de 2 lenzen mogen bij elkaar opgeteld worden.

$$S_{tot} = S_1 + S_2$$

½ pt

$$\frac{1}{F_{tot}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}$$

½ pt

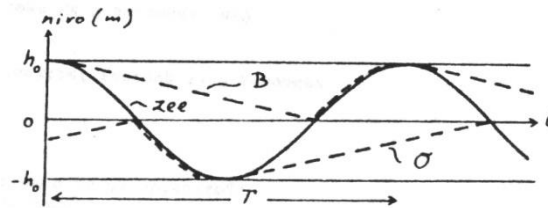
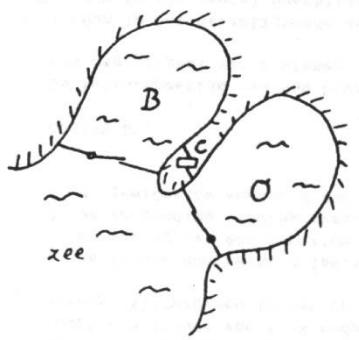
$$F_{tot} = \frac{F_1 \cdot F_2}{F_1 + F_2}$$

1 pt

Alternatief 1: lensformule voor beide lenzen opstellen en invullen $v_2 = -b_1$, voor de totale combinatie geldt: $\frac{1}{F_{tot}} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{b_2}$

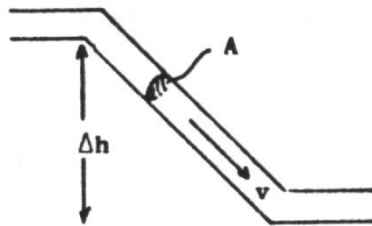
Alternatief 2: een voorwerp geplaatst in het brandpunt van de eerste lens zal na deze lens een evenwijdige bundel geven. Deze wordt vervolgens afgebeeld in het brandpunt van de tweede lens. Voor de combinatie geldt dus $v = F_1$ en $b = F_2$. Dat invullen levert hetzelfde antwoord.

10 Getijdencentrale (7 punten)



Het hoogteverschil tussen de reservoirs O en B is Δh .

De doorsnede van de valpijp is A .



Dan geldt bij ongestoorde val (geen turbine) dat $\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\Delta h$

Zodat: $v_0^2 = 2g\Delta h$

$\frac{1}{2}$ pt.

Voor het geval de turbines wel ingeschakeld zijn is de snelheid van het water in de valpijp v . zodat de hoeveelheid water die per seconde passeert $A \cdot v$ m³ is

$\frac{1}{2}$ pt.

De energie afgifte per seconde aan de turbines is dan: $\frac{1}{2} A \cdot v \cdot \rho_w \cdot (v_0^2 - v^2)$

1 pt.

Het rendement is f , zodat het geleverde vermogen is: $P = \frac{1}{2} f \cdot A \cdot v \cdot \rho_w \cdot (v_0^2 - v^2)$

$\frac{1}{2}$ pt.

P maximaal: $\left. \frac{dP}{dv} \right|_{v_m} = 0 \Rightarrow v_m^2 = \frac{1}{3} \cdot v_0^2$

1 pt.

Het maximale vermogen is dan: $P_m = \frac{1}{3} f \cdot A \cdot v \cdot \rho_w \cdot v_0^2 \cdot v_m$

$\frac{1}{2}$ pt.

Is de oppervlakte van het reservoir B, O en is de daalsnelheid van het niveau

dh/dt , dan geldt: $A \cdot v_m = O \cdot \frac{dh}{dt} = O \cdot \frac{h}{\frac{3}{4}T}$

1 pt.

Tevens valt uit de grafiek af te leiden: $\bar{v}_0^2 = 2gh$

1 pt.

Zodat $P_m = f \cdot \frac{O \cdot h^2}{T} \cdot 10^4$ W

1 pt.