UITWERKING Theorietoets eindronde 2021

1 Trillen

(a) Voor de lengte van de veer geldt: $l = \sqrt{l_0^2 + x^2} \approx l_0 + \frac{x^2}{2l_0}$

Dan volgt voor de veerkracht: $F_v = k\,\frac{x^2}{2l_0}$

De netto kracht wordt dan: $F = -2F_v \sin\theta = -2F_v \frac{x}{l_0} = -\frac{k}{l_0^2}x^3$

Oftewel: $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{l_0^2}x^3$

Dus: $\ddot{x} = -Cx^3$ met $C = -\frac{k}{ml_0^2}$

(b) $\mathrm{s} = [T] = [C]^\alpha \times [A]^\beta = \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} \times \frac{1}{\mathrm{kg}} \times \frac{1}{\mathrm{m}^2}\right)^\alpha \times \mathrm{m}^\beta = \mathrm{s}^{-2\alpha} \times \mathrm{m}^{-2\alpha+\beta}$

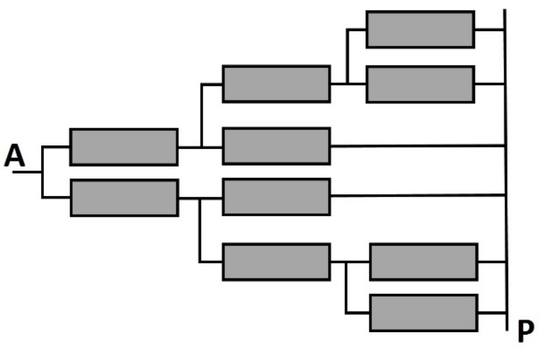
Hieruit volgt: $-2\alpha = 1$ en $-2\alpha + \beta = 0$. Dus $\alpha = -\frac{1}{2}$ en $\beta = -1$.

Dit betekent: $T \propto 1/A$.

Dus de periode wordt gehalveerd: 1,0 s.

2 Netwerkje

Alle punten in de diagonaal van linksonder naar rechtsboven mogen verbonden worden. Dan ontstaat de onderstaande schakeling. Het geheel is het dubbele van deze schakeling. Deze schakeling bestaat uit twee identieke helften parallel, boven en onder.



Uitrekenen van rechts naar links.

De weerstand van één zo'n deel is $R + \frac{3}{5}R = \frac{8}{5}R$

Deze gehele linker helft heeft dus een weerstand van $\frac{4}{5}R$

Samen met de rechterhelft (met dezelfde weerstand) dus: $\frac{8}{5}R$

Als $R = 5\ \Omega$ dan is de vervangingsweerstand dus $8\ \Omega$.

3 Je lichaam als Carnot

IDENTIFY: Since there is temperature difference between the inside and outside of your body, you can use it as a heat engine.

SET UP: For a heat engine $e = \frac{W}{Q_H}$. For a Carnot engine $e = 1 - \frac{T_C}{T_H}$. Gravitational potential energy is $U_{grav} = mgh$. 1 food-calorie = 1000 cal = 4186 J.

EXECUTE: (a) $e = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{303\text{ K}}{310\text{ K}} = 0.0226 = 2.26\%$. This engine has a very low thermal efficiency.

(b) $U_{grav} = mgh = (2.50\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(1.20\text{ m}) = 29.4\text{ J}$. This equals the work output of the engine.

$e = \frac{W}{Q_H}$ so $Q_H = \frac{W}{e} = \frac{29.4\text{ J}}{0.0226} = 1.30 \times 10^3\text{ J}$.

(c) Since 80% of food energy goes into heat, you must eat food with a food energy of

$\frac{1.30 \times 10^3\text{ J}}{0.80} = 1.63 \times 10^3\text{ J}$. Each candy bar gives $(350\text{ food-calorie})(4186\text{ J/food-calorie}) = 1.47 \times 10^6\text{ J}$.

The number of candy bars required is $\frac{1.63 \times 10^3\text{ J}}{1.47 \times 10^6\text{ J/candy bar}} = 1.11 \times 10^{-3}$ candy bars.

4 Bundelsplitser

(a) Interferentie reflecties boven- en onderglaasje, waardoor een weglengteverschil ontstaat tussen intern gereflecteerd door bovenglaasje en extern door onderglaasje, met een fasesprong 0,5 bij interne reflectie.
In doorlaat is het contrast zo klein dat het met het oog niet wordt waargenomen. (Het is de vraag of de deelnemers dit weten)

(b) $0{,}5896 \times 39/2 = 11{,}5\ \mu\text{m}$

(c) Faseverschil van 0,5 tussen interne en externe reflectie waarbij het weglengteverschil nul is.

(d) Golflengte is een factor 1,3 maal zo klein, dat betekent dat de condities voor destructieve interferentie een factor 1,3 maal zo groot worden, dus $39 \times 1{,}3 = 49{,}2$ en eentje is 50 strepen.

5 Helmholtz-spoelen

(a) Ten gevolge van een klein stroomelementje dl aan de bovenkant van de lus zal een bijdrage dB aan het veld in punt P ontstaan.

$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$

Vanwege symmetrie is alleen in de richting van de as van belang.

$B = \int dB \cos\phi = \int dB \frac{R}{r} = \int dB \frac{R}{(R^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$

Door nu de eerste vergelijking in de tweede in te vullen, volgt:

$B(x) = \int dB \cos\phi = \int dB \frac{r}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \int dl = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(b) Choose $x = 0$ at the center of the left coil. The center of the other coil will then be at $x = R$. Since the currents flow in the same direction in both coils, the right-hand-rule shows that the magnetic fields from the two coils will point in the same direction along the axis. The magnetic field from a current loop was found in (a). Adding the two magnetic fields together yields the total field.

$$B(x) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2[R^2+x^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 N I R^2}{2[R^2+(x-R)^2]^{3/2}}$$

(b) Eerste afgeleide op punt $x = \frac{1}{2}R$.

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{3\mu_0 NIR^2 x}{2[R^2+x^2]^{5/2}} - \frac{3\mu_0 NIR^2(x-R)}{2[R^2+(x-R)^2]^{5/2}} = -\frac{3\mu_0 NIR^3}{4[R^2+R^2/4]^{5/2}} - \frac{-3\mu_0 NIR^3}{4[R^2+R^2/4]^{5/2}} = 0$$

Tweede afgeleide op punt $x = \frac{1}{2}R$.

$$\frac{d^2B}{dx^2} = -\frac{3\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+x^2\right]^{5/2}} + \frac{15\mu_0 NIR^2 x^2}{2\left[R^2+x^2\right]^{7/2}} - \frac{3\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+(x-R)^2\right]^{5/2}} + \frac{15\mu_0 NIR^2(x-R)^2}{2\left[R^2+(x-R)^2\right]^{7/2}}$$

$$= -\frac{3\mu_0 NIR^2}{2\left[5R^2/4\right]^{5/2}} + \frac{15\mu_0 NIR^4}{8\left[5R^2/4\right]^{7/2}} - \frac{3\mu_0 NIR^2}{2\left[5R^2/4\right]^{5/2}} + \frac{15\mu_0 NIR^4}{8\left[5R^2/4\right]^{7/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 NIR^2}{\left[5R^2/4\right]^{5/2}}\left(-\frac{3}{2} + \frac{15\cdot 4}{8\cdot 5} - \frac{3}{2} + \frac{15\cdot 4}{8\cdot 5}\right) = \boxed{0}$$

Dus in het midden: $\frac{dB}{dx} = 0$ and $\frac{d^2B}{dx^2} = 0$.

(c) Invullen van gegeven waarden:

$$B\left(\tfrac{1}{2}R\right) = \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{1}{2}R\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2+\left(\frac{1}{2}R\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 NIR^2}{\left[R^2+\left(\frac{1}{2}R\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}\right)(250)(2.0\,\mathrm{A})(0.10\,\mathrm{m})^2}{\left[(0.10\,\mathrm{m})^2+(0.05\,\mathrm{m})^2\right]^{3/2}} = \boxed{4.5\,\mathrm{mT}}$$

6 Meneer Tompkins

Linker figuur:

Mr. Tompkins appears shrunk in the horizontal direction, since that is the direction of his motion, and normal size in the vertical direction, perpendicular to his direction of motion. This length contraction is a result of the fact that, to the people on the sidewalk, Mr. Tompkins is in a moving frame of reference. If the speed of light were only 20 mi/h, then the amount of contraction, which depends on γ, would be enough to be noticeable. Therefore, Mr. Tompkins and his bicycle appear very skinny.

Rechter figuur:

Thuis figure is shown from Mr. Tompkin’s viewpoint. In this case, Mr. Tompkins sees himself as “normal” but all the objects moving with respect to him are contracted.)

Het beste/gemakkelijkste kan het fietswiel gebruikt worden om γ te bepalen. Hoogte 2,2 cm en breedte 0,8 cm.

$$l = \frac{l_0}{\gamma}$$

Dus $\gamma = \frac{l_0}{l} = \frac{2{,}2}{0{,}8} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$1 - v^2/c^2 = \left(\frac{0{,}8}{2{,}2}\right)^2$$

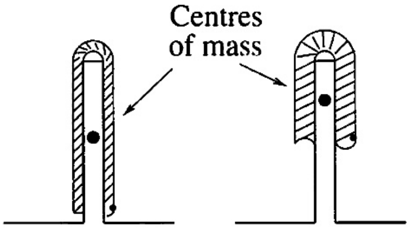
$$\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{0{,}8}{2{,}2}\right)^2 = 0{,}868$$

$$\frac{v}{c} = 0{,}93$$

Als de snelheid van Meneer Tompkins 20 km/h is, zal de lichtsnelheid in Wonderland dus $c = \frac{20}{0{,}93} = 21\ \mathrm{km/h}$ zijn.

B1 Platwormen

De verplaatsing van het CM is van belang. Als de worm halverwege is, is het CM van de lange worm op halve hoogte, die van de korte worm op driekwart. De verhouding is dus 2:3.



7 Sjoelen

(a) $L = MvR + MvR = 2MvR$

(b) Voor een schijf geldt: $I_M = \frac{1}{2}MR^2$

Voor het draaien om het contactpunt: $I_C = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

Voor de sjoelstenen samen: $I_{tot} = \frac{3}{2}MR^2 + \frac{3}{2}MR^2 = 3MR^2$

(c) Behoud van impulsmoment: $2MvR = I\omega$

$\omega = \frac{2MvR}{3MR^2} = \frac{2}{3}\frac{v}{R}$

(d) $E_{voor} = 2 \cdot \frac{1}{2}Mv^2 = Mv^2$

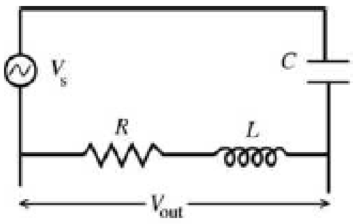
$E_{na} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3}{2}MR^2\frac{4}{9}\frac{v^2}{R^2} = \frac{12}{18}Mv^2 = \frac{2}{3}Mv^2$

Er gaat dus $\frac{1}{3}Mv^2$ aan warmte verloren. (Dat is $\frac{1}{3}$ van de totale energie.)

8 Hoogdoorlaatfilter

IDENTIFY and SET UP: Express Z and I in terms of ω, L, C and R. The voltages across the resistor and the inductor are $90°$ out of phase, so $V_{out} = \sqrt{V_R^2 + V_L^2}$.

EXECUTE: The circuit is sketched in Figure 31.51.



$$X_L = \omega L,\ X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$I = \frac{V_s}{Z} = \frac{V_s}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Figure 31.51

$$V_{out} = I\sqrt{R^2 + X_L^2} = I\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = V_s \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\frac{V_{out}}{V_s} = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

<u>ω small</u>

As ω gets small, $R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \to \frac{1}{\omega^2 C^2}$, $R^2 + \omega^2 L^2 \to R^2$.

Therefore $\frac{V_{out}}{V_s} \to \sqrt{\frac{R^2}{(1/\omega^2 C^2)}} = \omega RC$ as ω becomes small.

<u>ω large</u>

As ω gets large, $R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \to R^2 + \omega^2 L^2 \to \omega^2 L^2$, $R^2 + \omega^2 L^2 \to \omega^2 L^2$

Therefore, $\frac{V_{out}}{V_s} \to \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{\omega^2 L^2}} = 1$ as ω becomes large.

EVALUATE: $V_{out}/V_s \to 0$ as ω becomes small, so there is V_{out} only when the frequency ω of V_s is large. If the source voltage contains a number of frequency components, only the high frequency ones are passed by this filter.

9 Patroon

IDENTIFY: A double-slit bright fringe is missing when it occurs at the same angle as a double-slit dark fringe.

SET UP: Single-slit diffraction dark fringes occur when $a \sin\theta = m\lambda$, and double-slit interference bright fringes occur when $d \sin\theta = m'\lambda$.

EXECUTE: (a) The angle at which the first bright fringe occurs is given by
$\tan\theta_1 = (1.53 \text{ mm})/(2500 \text{ mm}) \Rightarrow \theta_1 = 0.03507°$. $d\sin\theta_1 = \lambda$ and

$$d = \lambda/(\sin\theta_1) = (632.8 \text{ nm})/\sin(0.03507°) = 0.00103 \text{ m} = 1.03 \text{ mm}$$

(b) The 7^{th} double-slit interference bright fringe is just cancelled by the 1^{st} diffraction dark fringe, so $\sin\theta_{\text{diff}} = \lambda/a$ and $\sin\theta_{\text{interf}} = 7\lambda/d$

The angles are equal, so $\lambda/a = 7\lambda/d \rightarrow a = d/7 = (1.03 \text{ mm})/7 = 0.148 \text{ mm}$.

EVALUATE: We can generalize that if $d = na$, where n is a positive integer, then every n^{th} double-slit bright fringe will be missing in the pattern.

10 Spoetniks

Herschrijf de snelheden van A en B in he stelsel van C.

$$v_A' = \frac{v_A - w}{1 - \frac{v_A w}{c^2}}$$

$$v_B' = \frac{v_B - w}{1 - \frac{v_B w}{c^2}}$$

Voor C is de ene snelheid positief en de andere negatief, dus opgeteld nul

$$v_A' + v_B' = 0$$

Dit netjes uitwerken, levert op $w = \frac{7}{9}c$

11 Zuiger

(a) Het gewicht van de zuiger is mg, deze kracht moet even groot zijn als de omhoog gerichte kracht van het gas pA:

$$p = \frac{mg}{A}$$

(b) De wet van Boyle bij constante temperatuur: pV is constant.

Als we dit differentiëren volgt:

$$p\,dV + V\,dp = 0$$

Wordt de zuiger over een afstand x verplaatst, dan neemt het volume toe met $dV = Ax$.

Dus volgt voor de drukverandering:

$$dp = -\frac{p\,dV}{V} = -\frac{mg}{A}\frac{Ax}{V} = -\frac{mgx}{V}$$

De terugwerkende kracht op de zuiger is dus:

$$-\frac{mgAx}{V}$$

Waarbij het minteken aangeeft dat de kracht tegengesteld is aan de verplaatsing.

(c) Voor de bewegingsvergelijking volgt dus:

$$m\ddot{x} = -\frac{mgAx}{V}$$

Oftewel:

$$\ddot{x} = -\frac{gAx}{V}$$

Dit is de differentiaal vergelijking van een harmonische trilling. Voor de hoekfrequentie geldt:

$$\omega = \sqrt{\frac{gA}{V}}$$

Merk op dat deze onafhankelijk is van de massa *m* van de zuiger.

11 Proef van Millikan

(a) Krachtenevenwicht:

$$6\pi\eta r v_1 = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \tfrac{4}{3}\pi r^3 d g$$

Wegdelen πr, en herschrijven levert gevraagde formule op.

(b) Wederom krachtenevenwicht:

$$qE = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \tfrac{4}{3}\pi r^3 d g + 6\pi\eta r v_2$$

Met eerste krachtenevenwicht volgt direct gevraagde formule.

(c) $v_1 = \frac{s}{t_1}$ en $v_2 = \frac{s}{t_2}$ en $E = U_0/h$

Deze drie samen met antwoord (a) in antwoord (b).

Alle termen NIET t of U in constante K levert gevraagde formule.

(d) Berekeningen:

Druppel	Spanning U_0 (V)	Tijd $t_1(s)$	Tijd $t_2(s)$	Lading ne (C)
#1	1130	16	24	8,02E-19
#2	1305	27	39	3,22E-19
#3	850	32	28	4,85E-19

Bepaling: Aanname dat laagst gemeten waarde de elementaire lading is. Dat is de tweede meting. Dan zouden #1 en #3 daar een veelvoud van moeten zijn. Dat is NIET het geval. Dan zou moeten gelden dat #2 TWEE MAAL de elementaire lading is. Dan zouden #1 en #3 een veelvoud van DE HELFT van #2 moeten zijn. Dat is WEL het geval. (Resp. 5, 2 en 3 maal de elementaire lading.)

B2 Brandstofverbruik

Omzetten:

$$\frac{4\ \mathrm{L}}{100\ \mathrm{km}} = \frac{4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{10^5\ \mathrm{m}} = 4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^2 = 0{,}04\ \mathrm{mm}^2$$

Dit is een klein oppervlak, een vierkant met een zijde van 0,2 mm.

Het komt dus overeen met een ‘draad’ met een doorsnede van $0{,}04\ \mathrm{mm}^2$ gevuld met benzine die door de rijdende auto wordt verbruikt. Als deze draad 100 km lang is, heeft de draad een volume van 4 L.