Eindronde
Natuurkunde Olympiade
2020

NATUURKUNDE OLYMPIADE

theorietoets
deel 1 + deel 2
uitwerkingen

BB2020R3-01: Slinger

De lengte van de slinger is l. De massa zal gedurende de boog AP een versnelling hebben die kleiner is dan g. Dus volgt:

$$t_{AP} > \sqrt{\frac{2l\sin 30°}{g}} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Punt Q zit halverwege op de boog PB. Met energiebehoud volgt:

$v_P = \sqrt{2gl\sin 30°} = \sqrt{gl}$ en $v_Q = \sqrt{2gl\sin 60°} = \sqrt{\sqrt{3}gl}$

De slinger zal de booglengte $PQ = l\pi/6$ in het echt sneller doorlopen dan met een constante snelheid v_P en zo ook zal booglengte $QB = l\pi/6$ in het echt sneller worden doorlopen dan met een constante snelheid v_Q. Anders geschreven:

$$t_{PB} < \frac{l\pi}{6v_P} + \frac{l\pi}{6v_Q} \approx 0{,}92\sqrt{\frac{l}{g}}$$

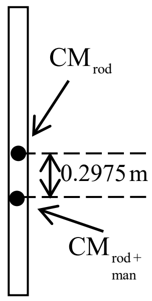
Oftewel $t_{AP} > t_{PB}$, het onderste deel wordt dus sneller doorlopen.

BB2020R302a en b: Balk over het ijs

(a) Impulsbehoud (van CM):

$p_{begin} = p_{eind} \rightarrow m_{balk}v_0 = (m_{balk} + m_{man})v_{eind}$

Invullen van getallen levert: $v_{eind} = 14 \text{ m/s}$



(b) Behoud van draaiimpuls om het CM. Daartoe moet eerst het CM bepaald worden. Neem voor het gemak het midden van de balk als $y = 0$.

$y_{CM} = \frac{m_{balk} \cdot 0 + m_{man} \cdot \frac{1}{2}l}{(m_{balk}+m_{man})} = 0{,}2975 \text{ m}$

We hebben tevens het traagheidsmoment van het systeem nodig om het CM van het systeem. Dat kan met Steiner gedaan worden.

$I_{balk} = \frac{1}{12}m_{balk}l^2 + m_{balk}r_{balk}^2$

$I_{man} = m_{man}\left(\frac{1}{2}l - r_{balk}\right)^2$

$L_{begin} = L_{eind} \rightarrow m_{balk}v_0r_{balk} = (I_{balk} + I_{man})\omega_{eind}$

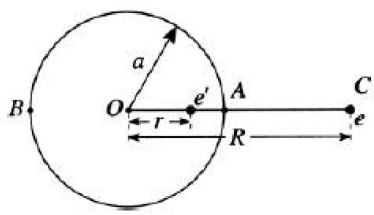
$\omega_{eind} = \frac{m_{balk}v_0r_{balk}}{I_{balk} + I_{man}} = \frac{m_{balk}v_0r_{balk}}{\frac{1}{12}m_{balk}l^2 + m_{balk}r_{balk}^2 + m_{man}\left(\frac{1}{2}l - r_{balk}\right)^2} = 5{,}3 \text{ rad/s}$

BB202R3-03: Bol en lading

Beschouw twee punten A en B aan weerskanten van de bol (zie figuur). De potentiaal op punten A en B t.g.v. twee ladingen e en e' wordt gegeven door:

$$\phi_A = \frac{e}{R-a} + \frac{e'}{a-r} = 0$$

$$\phi_B = \frac{e}{R+a} + \frac{e'}{r+a} = 0$$



Oftewel:

$$e(a-r) + e'(R-a) = 0$$

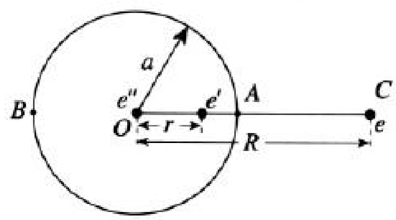
$$e(a-r) + e'(R-a) = 0$$

Hieruit halen we:

$$e' = -\frac{ea}{R}$$

$$r = \frac{a^2}{R}$$

De bol is echter neutraal, dus we moeten een extra lading $e'' = -e'$ plaatsen en tegelijkertijd de potentiaal op de bol constant houden. Deze lading moet in het midden van de bol geplaatst worden, zie figuur.



De potentiaal op het oppervlak van de bol wordt dan dus:

$$\phi_0 = \frac{e''}{a} = -\frac{e'}{a} = \frac{ea}{Ra} = \frac{e}{R}$$

(Omdat de potentiaal t.g.v. de ander twee ladingen nul is.)

BB2020R3-04a: Schakeling met constante stroombron

Een ideale voltmeter heeft een oneindige weerstand, er zal dus geen stroom lopen tussen A en B.
Vanwege symmetrie zal er door elke lus dezelfde stroom lopen, dus een stroom $I_s/2$.
Neem aan dat de potentiaal onderin de schakeling nul is.
Dan volgt voor punt A:

$$U_A = \frac{I_S}{2} 2R = I_S R$$

Evenzo voor punt B:

$$U_B = \frac{I_S}{2} 42R = 2I_S R$$

Dus de voltmeter geeft aan:

$$U_A - U_B = I_S R - 2I_S R = -I_S R$$

BB2020R3-04b: Schakeling met constante stroombron

Een ideale stroommeter heeft geen weerstand. De schakeling kan dus vereenvoudigd worden met een effectieve weerstand van $6R$ die de twee verticale takken verbindt.
Vanwege symmetrie moet de stroom door de zowel de weerstanden van $2R$ als die van $4R$ hetzelfde zijn. Dus we hebben de volgende vergelijkingen:

$$I_S = I_2 + I_4$$
$$I_2 = I_6 + I_4$$
$$I_4 \cdot 4R = I_2 \cdot 2R + I_6 \cdot 6R$$

Oplossen: $I_S = I_6 + 2I_4$ en $4I_4 = 2(I_6 + I_4) + 6I_6$
Zodat: $I_4 = 4I_6$ en $I_S = 9I_6$
Oftewel: $I_6 = \frac{1}{9} I_S$

BB2020R3-05: Muonen

Voor de cirkelbeweging geldt:

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

en

$$2\pi r = |\vec{v}|T$$

Dit is pure wiskunde en geldt dus ook voor relativistische snelheden.
Omdat $|\vec{v}|$ constant is voor de cirkelbeweging, is γ dat ook. Als $\vec{E} = 0$ geldt voor de grootte van de krachten:

$$\gamma m \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = q|\vec{v}|B$$

Combineren van bovenstaande vergelijkingen:

$$\frac{2\pi}{T} \gamma m = qB$$

Als de helft van de muonen tijdens een rondje vervallen, zal in het stelsel van de muonen elk rondje een halfwaardetijd $T_{\frac{1}{2}}$ duren. In het lab stelsel volgt dan:

$$T = \gamma T_{\frac{1}{2}}$$

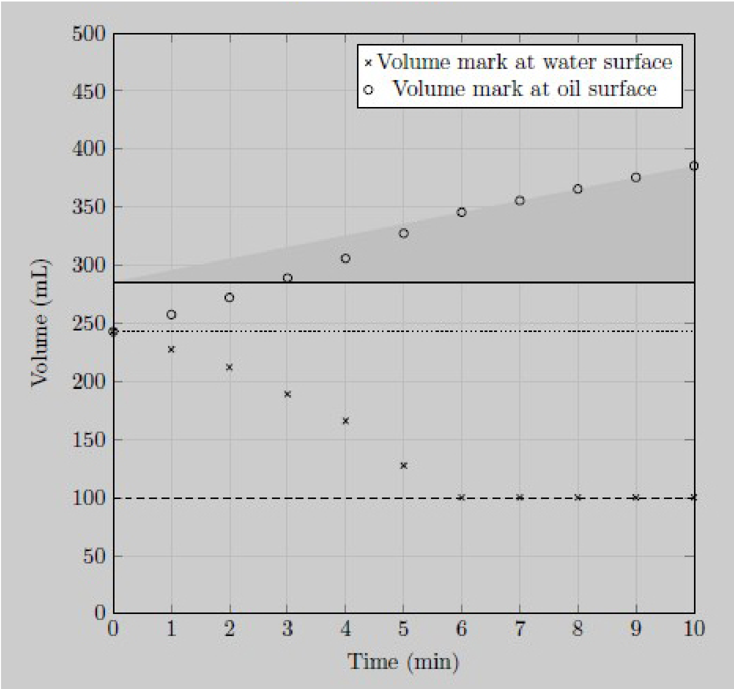
Dus volgt:

$$\frac{2\pi}{\gamma T_{\frac{1}{2}}}\gamma m = qB$$

$$B = \frac{2\pi m}{qT_{\frac{1}{2}}}$$

Invullen: $B = 4{,}85\ \mathrm{mT}$
De snelheid van de muonen is irrelevant t.o.v. het gedeelte dat per rondje vervalt, zelfs in het relativistische geval. De rondjes duren langer, maar de muonen leven langer, beide met dezelfde factor γ.

BB2020R3-06: Badeend



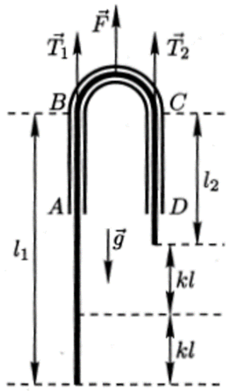
Olie drijft op water. Als de olie in de maatcilinder stroomt, zal de opwaartse kracht t.g.v. de verplaatste olie groter worden, die van het water steeds minder. Het waterniveau zal dus dalen. Dit dalen van het water stopt als de badeend volledig op de olie drijft (of er volledig in ondergedompeld is). Voor alle tijdstippen geldt dat de opwaartse kracht van het water dat niet meer verplaats wordt gelijk is aan de opwaartse kracht van de verplaatste olie. In formule:

$$\rho_o g \Delta V_o = \rho_w g \Delta V_w$$

Na $t > 6$ verandert het volume van het water niet meer. Het volume van het verplaatste water is af te lezen tussen de twee gearceerde lijnen: $143\ \mathrm{mL}$. Op $t = 0$ is er geen olie in de maatcilinder, voor $t > 6$, als het waterniveau niet meer daalt, is de toename van het olieniveau enkel t.g.v. de olie die toegevoegd wordt. Door de lijn van $t > 6$ te extrapoleren naar $t = 0$ is dus de toename van het olieniveau te zien, de hoogte van de gemarkeerde gebied geeft het volume van de olie aan.
Als we wederom op tijdstip $t = 6$ kijken, wordt het totale olieniveaubepaald door de toegevoegde olie (verschil gemeten hoogte en doorgetrokken lijn) en het verplaatste volume (verschil gearceerde lijn en doorgetrokken lijn). Die laatste heeft een waarde van $186\ \mathrm{mL}$.
Er volgt dus voor de dichtheid van olie:

$$\rho_o = \rho_w \frac{\Delta V_w}{\Delta V_o} = 1{,}00\ \mathrm{g/mL}\frac{143\ \mathrm{mL}}{186\ \mathrm{mL}} = 0{,}77\ \mathrm{g/mL}$$

BB2020R3-07a en BB2020R3-07b: Slippend koord



(a) ρ is de lineaire touwdichtheid (kg/m), l de totale lengte van het touw en l_1 en l_2 De twee stukken links en rechts ($l_1 + l_2 = l$). T_1 en T_2 de krachten in het touw bij B en C.

F is de verticale component van de kracht die de koker op het touw uitoefent.

De tweede wet van newton kunnen voor de verticale stukken touw noteren:

$\rho l_1 a = \rho l_1 g - T_1$ en $\rho l_2 a = T_2 - \rho l_2 g$. Omdat BC te verwaarlozen is ten opzichte van de lengte, kunnen we stellen dat $T_1 = T_2 = T$.

Met de wetten van Newton invullen, kunnen we stellen:

$$a = g\frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2} = 2kg$$

(b) Met $l_1 - l_2 = 2kl$, $l_1 = \left(\frac{1}{2} + k\right)l$, $l_2 = \left(\frac{1}{2} - k\right)l$ kunen we dan schrijven:

$$T = 2\rho g\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{1}{2}\rho l g(1 - 4k^2)$$

Beschouw een stukje touw dat van B naar C beweegt $\Delta l = v\Delta t$. De snelheid blijft gelijk maar verandert van richting. Voor de impulsverandering geldt dan:

$\Delta p = 2(\rho\Delta l)v = (2T - F)\Delta t$, dus $F = 2T - 2\rho v^2$.

v kan nu bepaald worden emt behoud van energie:

$\frac{\rho l v^2}{2} = E_{\text{kin}} = -\Delta E_{\text{pot}} = (\rho k l)g(kl)$, en dus $2\rho v^2 = 4\rho l g k^2$.

Voor F kan dan geschreven worden: $F = \rho \mathrm{lg}\,(1 - 8k^2)$.

Om los te komen geldt $F = 0$, en dus $k = 1/(2\sqrt{2})$ en $a = g/\sqrt{2}$.

BB2020R3-08: Biprisma

De lichtstraal die recht op het prisma valt, buigt af onder een hoek $\frac{1}{2}\phi$ en daarmee komt het beeld van de spleet op $\frac{1}{2}l = \frac{1}{2}\phi$ van bron S te liggen (de twee beelden liggen dus l van elkaar). We kunnen schrijven voor de breking:

$$\frac{1}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{1}{2}\phi + \alpha\right)}$$

Met gebruik van kleine hoeken levert dat op

$$\phi = 2(n-1)\alpha$$

En omdat

$$l = d \cdot 2(n-1)\alpha = 0{,}1 \cdot 2 \cdot (1{,}5 - 1) \cdot 0{,}0175 = 0{,}00175 \text{ m}$$

Voor constructieve interferentie op het scherm geldt dan:

$$\lambda = d \cdot \sin\theta$$

Ofwel

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{l} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-6}}{0{,}00175} = 0{,}00029 = \tan\theta$$

Daarmee wordt de afstand s tussen nulde en eerste orde gelijk aan

$$s = 5{,}1 \cdot 0{,}00029 = 0{,}0015 \text{ m} = 1{,}5 \text{ mm}$$

BB2020R3-09: Luchtbellen in water

Voor een luchtbel geldt in evenwicht:

$$p_i = p_o + \rho g h + \frac{2\sigma}{R_0}$$

Hierin is $\rho g h$ de hydrostatische druk (met h de waterhoogte). Omdat $R_0 \ll h$ houden we geen rekening met de grootte voor wat betreft de h. Nadat de twee belletjes één geworden zijn, zal de druk in het nieuwe belletje niet anders geworden zijn. Dit vanwege de constante temperatuur en omdat het totale volume van de pot niet verandert. (En omdat het water niet samendrukbaar is.)

Voor de nieuwe straal geldt dus:

$$2 \cdot \tfrac{4}{3}\pi R_0^3 = \tfrac{4}{3}\pi R_1^3$$

Oftewel:

$$R_1 = 2^{\frac{1}{3}} R_0$$

Voor de nieuwe bel geldt:

$$p_i = p_1 + \rho g h + \frac{2\sigma}{R_1}$$

Dus volgt:

$$\Delta p = p_1 - p_0 = 2\sigma\left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right) = \frac{2\sigma}{R_0}\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\right) \approx 0{,}4\frac{\sigma}{R_0}$$

BB2020R3-10: 2 ladingen in cirkel

Op een bal werken drie krachten, F_Z, F_e en F_n. De laatste staat loodrecht op de baan. We hoeven dus alleen maar te kijken naar de componenten van F_e en F_z die daar loodrecht op staan, dus in de richting van de baan. De twee componenten van F_z en F_e heffen elkaar op. Omdat de hoeken bekend zijn (gelijkbenige driehoek), is q uit te drukken in m en R (en g).

$$F_z \cos 60° = F_e \cos 30°$$

$$F_e = \frac{F_z}{\tan 60°}$$

$$\frac{4\pi\epsilon q^2}{R^2} = \frac{mg}{\tan 60°}$$

$$q^2 = \frac{mgR^2}{4\pi\epsilon \tan 60°} = \frac{mgR^2}{4\pi\epsilon\sqrt{3}}$$

$$q = \sqrt{\frac{mgR^2}{4\pi\epsilon\sqrt{3}}}$$

BB2020R3-11: Condensatorschakeling

Geleidbaarheid van C_2: $S_2 = i\omega C_2 = 377 \cdot 2 \cdot 10^{-7} i$

Geleidbaarheid voor R: $S = \frac{1}{R} = 10^{-4}$

Voor combi van die twee: $Z_{RC_2} = \frac{1}{10^{-4}(1+0{,}754i)} = \frac{10^4(1-0{,}754i)}{1+0{,}754^2}$

Voor *C₁* geldt: $Z_1 = -\frac{i}{\omega C_1} = -\frac{i}{377 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = -5300i$

Voor het hele circuit geldt dan: $Z = 6360 - 10100i$

De stroomsterkte is te bereken:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{120}{6360 - 10100i} = \frac{120(6360 + 10100i)}{6360^2 + 10100^2} = (5{,}37 + 8{,}53i)10^{-3}\mathrm{A}$$

De lengte hiervan geeft de rms-stroom. Dat is dan 10 mA.

De fase van de stroom is $\varphi = \tan^{-1}(0{,}853/0{,}537) = 1{,}01$ rad

Het hele circuit gebruikt dan gemiddeld:
$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = 120 \cdot 0{,}01 \cdot \cos(1{,}01) = 0{,}64\ \mathrm{W}$

BB2020R3-12a, BB2020R3-12b en BB2020R3-12c: Schokgolf

(a) Eenheden schrijven in m, kg en s. Voor elke eenheid levert dat een vergelijking op:
Voor m: $1 = 2\alpha - 3\beta$
Voor kg: $0 = \alpha + \beta$
Voor s: $0 = 2\alpha + \gamma$
Dat levert: $\alpha = 0{,}2$, $\beta = -0{,}2$ en $\gamma = 0{,}4$.

(b) Als de druk in de schokgolf gelijk wordt aan die van de omringende lucht, wordt snelheid van de schokgolf gelijk aan de geluidssnelheid en blijft dan constant. Trek een rechte lijn door de meetpunten voor $t > 0{,}1\ \mathrm{s}$ en extrapoleer deze voor $t < 0{,}1\ s$. Het lineaire verloop begint dan vanaf $t = 0{,}05\ \pm 0{,}01\ \mathrm{s}$.

(c) Uitgaande van $t = 0{,}05\ \mathrm{s}$ volgt dan $E \approx 1{,}4 \cdot 10^{11}\ \mathrm{J}$. Maar omdat de golf een halve bol besloeg is de vrijgekomen energie de helft hiervan, dus: $E \approx 7 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J} = 70\ \mathrm{GJ}$.

BB2020R3-13: Gaan we wel of niet?

De 2 schakelaar van de kinderen moeten in serie.
Dit moet weer in serie met een schakeling die enkel aan is als één van de ouders een 'JA' heeft. Dat laatste kan met een zgn. hotelschakeling.