

Algemene instructies voor de theoretische toets

De theoretische toets duurt 5 uur. De opdrachten in de theoretische toets zijn samen 30 punten waard. Succes van Ad en Enno.

Het begin en het einde van de toets wordt aangegeven met een geluidssignaal. Je mag de enveloppen met de opdrachten niet openen voordat het geluidssignaal gaat dat het begin van de toets aangeeft. Elk uur zal de verstreken tijd worden aangegeven. Zo ook een kwartier voor het einde van de toets.

Tijdens de theoretische toets

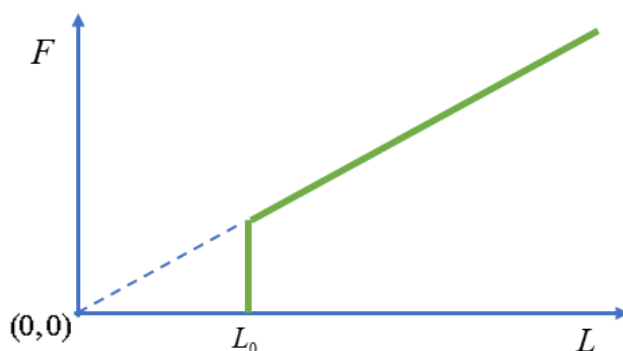
- Gebruik enkel de geleverde pen.
- Er zijn speciale antwoordbladen voor je antwoorden (aangegeven met A). Voor elk onderdeel zijn ook lege werkbladen (aangegeven met een W) om berekeningen en/of uitwerkingen te maken. **Let er op dat je bladen gebruikt die bij het betreffende onderdeel horen** (controleer het nummer in de header van het blad). Zet een kruis door iets dat je hebt opgeschreven maar niet beoordeeld wilt hebben. Gebruik alleen de voorkant van elk blad.
- Wees kort en bondig in je antwoorden. Gebruik waar mogelijk vergelijkingen, logische operatoren en tekeningen om je resultaten te verduidelijken. Vermijd het gebruik van lange zinnen.
- Het is vaak mogelijk onderdelen te doen zonder dat je de voorgaande onderdelen opgelost hebt.
- Je mag zonder toestemming je werkgebied niet verlaten. Als je hulp nodig hebt, maak je dat kenbaar aan een surveillant door een van de drie vlaggetjes te gebruiken ("WC" als je naar de WC moet, "H2O" als je water nodig hebt, of "Help" in alle andere gevallen.)

Aan het einde van de theoretische toets

- Aan het einde van de toets moet je direct stoppen met schrijven.
- Leg voor elke opgave (Q1, Q2 en Q3) je bladen in de volgende volgorde: Voorblad (cover sheet C) bovenaan, vragen (questions Q), antwoorden (answer sheets A) en onderaan werkbladen (worksheets W), inclusief lege of extra bladen (Z).
- Stop alle bladen van een opgave in de daarvoor bestemde envelop. Ook lege bladen moeten worden ingeleverd. Zorg ervoor dat je studentcode zichtbaar is in het kijkvenster van elke envelop. Stop de enveloppen, inclusief deze algemene instructie in de overgebleven grote envelop. Het is niet toegestaan om bladen uit de toetsruimte mee te nemen.
- Laat je schrijfgerei achter op je tafel.
- Wacht bij je tafel totdat je enveloppen zijn opgehaald. Als alle enveloppen zijn opgehaald zal je gids je naar de uitgang begeleiden.

'Zero-length springs' en slinky veren

Een 'zero effective length spring' (ZLS) is een veer waarvoor de kracht recht evenredig is met de lengte van de veer, $F = kL$ voor lengtes $L > L_0$, waarbij L_0 de minimale lengte is van de veer en tevens haar lengte wanneer ze niet wordt belast. Figuur 1 geeft voor een ZLS het verband weer tussen de kracht F en de lengte L van de veer. De helling van de weergegeven lijn is gelijk aan de veerconstante k . Doe je best!



Figuur 1: Verband tussen de kracht F en de lengte L van de veer

In seismografie wordt gebruik gemaakt van een ZLS en deze laat zeer nauwkeurige metingen toe van variaties in de valversnelling g . Hier beschouwen we een ZLS, waarvan het gewicht Mg groter is dan kL_0 . We definiëren een bijhorende dimensieloze verhouding $\alpha = kL_0/Mg < 1$, een maat voor de relatieve stroefheid (stugheid) van de veer. Het speelgoed bekend als 'slinky veer' is mogelijk (maar niet noodzakelijk) een voorbeeld van de hier beschreven ZLS.

Deel A: Statika (3.0 punten)

A.1 Beschouw een lengtesegment $\Delta\ell$, van een niet uitgerekte ZLS veer, die vervolgens wordt uitgerekt door een kracht F , onder gewichtsloze omstandigheden. Wat is de lengte Δy van dit segment van de veer als functie van F , $\Delta\ell$ en de parameters van de veer? 0.5pt

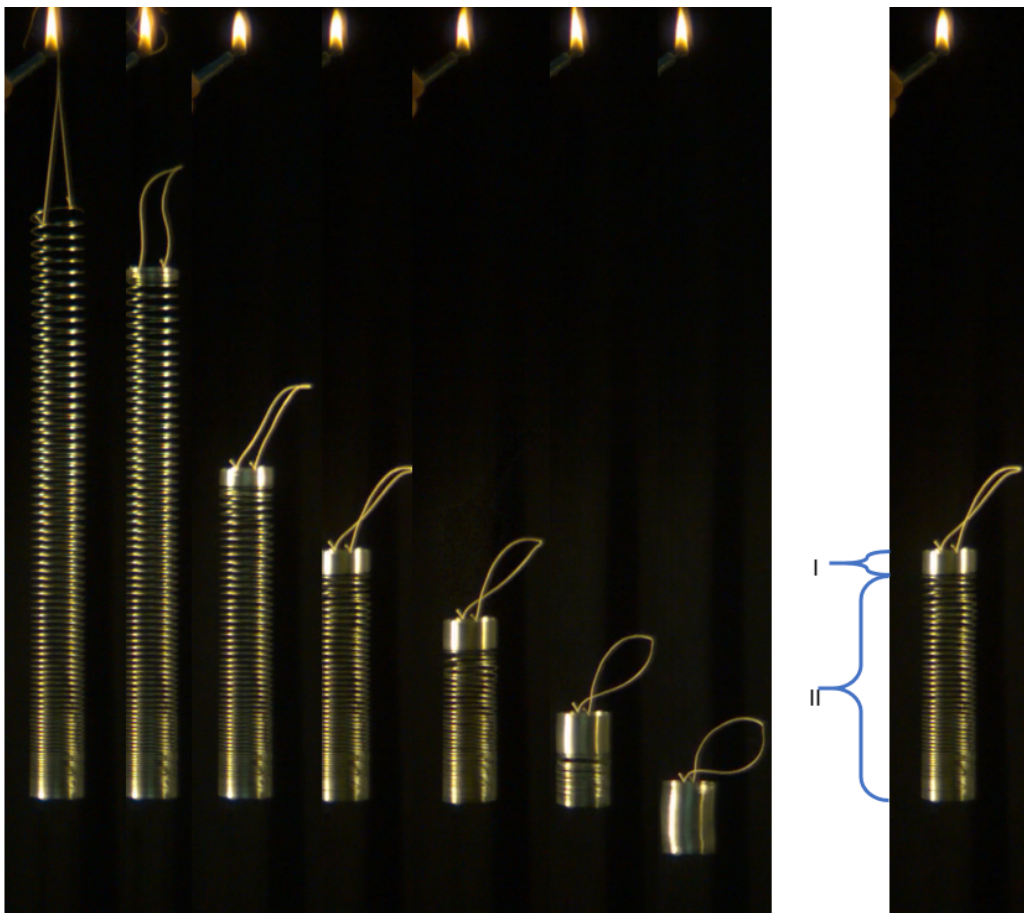
A.2 Bereken voor een segment met lengte $\Delta\ell$ de arbeid ΔW die moet worden verricht om dit segment met een oorspronkelijke lengte $\Delta\ell$ uit te rekken tot een lengte Δy . 0.5pt

In deze opgave zal een punt van de veer gekarakteriseerd worden door de afstand ℓ ($0 \leq \ell \leq L_0$), gemeten vanaf de onderkant van de veer wanneer deze niet wordt uitgerekt. Dit betekent dat ℓ voor elk punt van de veer ongewijzigd blijft, ook wanneer de veer wordt uitgerekt.

A.3 Veronderstel dat we de veer ophangen aan haar bovenste uiteinde zodat ze wordt uitgerekt onder invloed van haar eigen gewicht. Wat is de totale lengte H van de opgehangen veer in evenwicht? Geef je antwoord als functie van L_0 en α . 2.0pt

Deel B: Dynamica (5.5 punten)

Uit experimenten blijkt dat wanneer de veer in rust is opgehangen en vervolgens wordt losgelaten, de veer vanaf de top geleidelijk inkrimpt terwijl het onderste deel stationair blijft (zie figuur 2). Naarmate de tijd vordert beweegt het inkrimpende deel als een vast blok waaraan steeds meer ringen worden toegevoegd, terwijl het stationaire deel alsmaar korter wordt. Elk punt van de veer begint slechts te bewegen wanneer het wordt bereikt door het bewegende deel. Het onderste uiteinde van de veer begint slechts te bewegen wanneer de veer volledig in elkaar is geklapt en haar niet uitgerekte lengte L_0 bereikt. Hierna beweegt de niet uitgerekte veer zonder te kantelen verder recht naar beneden als een star lichaam, onder invloed van de zwaartekracht.



Figuur 2: Links: Een opeenvolging van beelden genomen tijdens de vrije val van de slinky veer. Rechts: het bewegende deel I en het stationaire deel II tijdens de vrije val van de veer.

We vragen je in het vervolg van de opgave je oplossing te baseren op het beschreven model. Luchtweerstand mag worden verwaarloosd, het is echter niet toegestaan L_0 te verwaarlozen.



- B.1** Bereken de tijd t_c , vanaf het loslaten van de veer tot het moment dat ze volledig in elkaar is geklapt tot haar minimale lengte L_0 . Druk je antwoord uit als functie van L_0 , g en α . 2.5pt

Bereken de numerieke waarde van t_c voor een veer waarvan $k = 1.02 \text{ N/m}$, $L_0 = 0.055 \text{ m}$ en $M = 0.201 \text{ kg}$ en waarbij je voor g een waarde van 9.80 m/s^2 gebruikt.

- B.2** In deze opgave verwijst ℓ naar de coördinaat van de grens tussen delen I (het bewegende deel in figuur 2) en II (het stationaire deel). Op een bepaald ogenblik waarop het stationair deel nog steeds bestaat is de massa ervan $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0}M$, en heeft het bewegende deel een uniforme instantane snelheid $v_I(\ell)$. Toon aan dat op dit ogenblik (waarop er nog steeds een stationair deel bestaat) de snelheid van het bewegende deel geschreven kan worden als $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$. Druk de constanten A en B uit als functie van L_0 , g en α . 2.5pt

- B.3** Maak gebruik van B.2 om de minimale snelheid $v_{\min}$ te bepalen van het bewegende deel van de veer tijdens de val, vanaf het moment dat ze wordt losgelaten tot het moment dat ze de grond raakt. Druk je antwoord uit als functie van L_0 , α , A en B . 0.5pt

Deel C: Energiebeschouwingen (1.5 punten)

- C.1** Bereken de hoeveelheid mechanische energie Q die verloren gaat in de vorm van warmte, vanaf het ogenblik van loslaten tot het ogenblik vlak voor de veer de grond raakt. Druk je antwoord uit als functie van L_0 , M , g en α . 1.5pt



'Zero-length springs' en slinky veren

Deel A: Statica (3.0 punten)

A.1 (0.5 pt)

$$\Delta y =$$

A.2 (0.5 pt)

$$\Delta W =$$

A.3 (2.0 pt)

$$H =$$

Deel B: Dynamica (5.5 punten)

B.1 (2.5 pt)

$$t_c =$$

$$t_c =$$

B.2 (2.5 pt)

$$A =$$

$$B =$$

B.3 (0.5 pt)

$$v_{\min} =$$

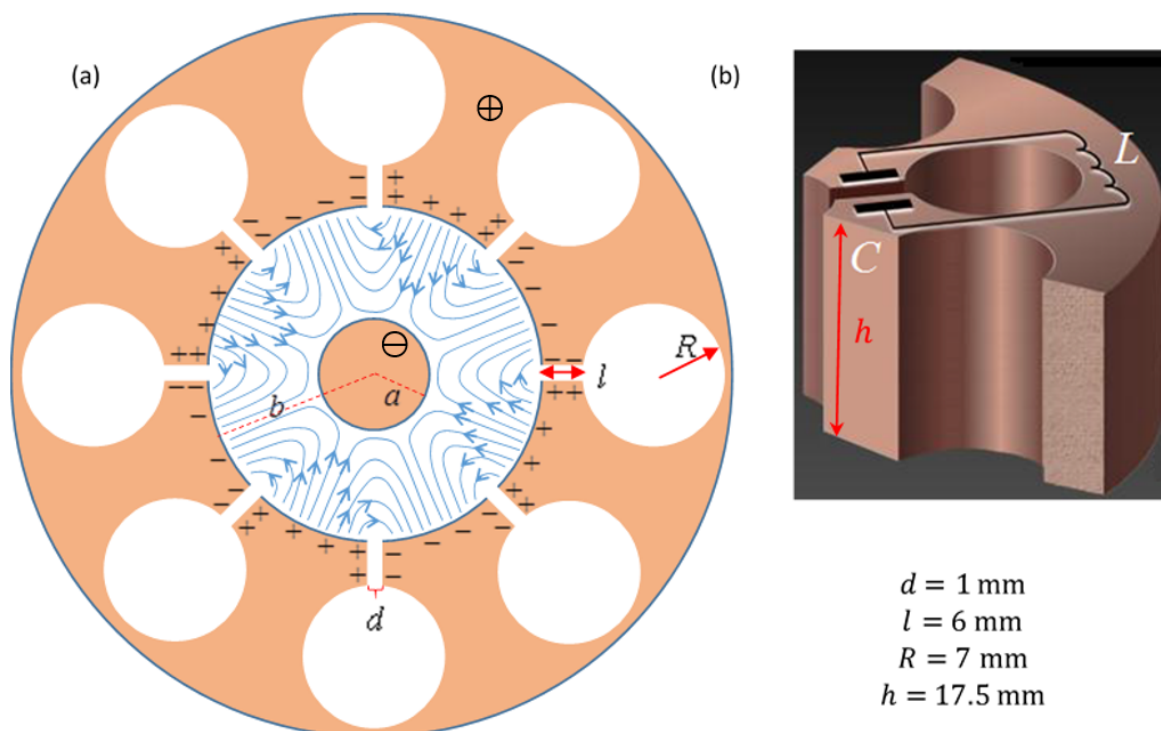
Deel C: Energiebeschouwingen (1.5 punten)

C.1 (1.5 pt)

$$Q =$$

De Natuurkunde van een Microgolfoven

Deze vraag gaat over het ontstaan van microgolfstraling in een microgolfoven en het gebruik ervan om voedsel op te warmen. Microgolfstraling wordt gegenereerd in een onderdeel van een microgolfoven: de "magnetron". Deel A gaat over de werking van deze magnetron, deel B gaat over de absorptie van microgolfstraling in voedsel. Succes jongens!



Figuur 1

Deel A: De structuur en werking van een magnetron (6.6 punten)

Een magnetron is een apparaat voor het genereren van microgolfstraling, hetzij gepulseerd (voor radar toepassingen), hetzij continu (bijvoorbeeld in een microgolfoven). Deze magnetron heeft een modus van zelfversterkende oscillaties. Door over de magnetron een constante (niet-wisselende) spanning aan te sluiten, wordt deze toestand snel geactiveerd. De op deze manier gecreëerde microgolfstraling wordt door de magnetron uitgezonden.

De magnetron van een microgolfoven bestaat uit een massieve koperen cilindervormige kathode (met straal a) en een omringende anode (met straal b). Deze anode heeft de vorm van een dikke cilindervormige schil. In deze schil zijn cilindervormige holtes geboord. Deze holtes worden ook wel "resonatoren" genoemd. Eén van de resonatoren is gekoppeld aan een antenne die de microgolffenergie kan uitzenden. Aan deze antenne wordt verder geen aandacht geschonken.

Alle inwendige ruimtes zijn vacuüm.

We beschouwen een magnetron met acht resonatoren, zoals weergegeven in Figuur 1(a). De driedimensionale structuur van één enkele resonator is weergegeven in Figuur 1(b).

Zoals te zien is in de figuur, gedraagt elk van de acht holtes zich als een LC (inductor-capacitor) resonator,



die werkt bij een frequentie van $f = 2.45$ GHz.

Er wordt een statisch uniform magnetisch veld aangelegd langs de longitudinale as van de magnetron, uit het papier gericht in Figuur 1(a). Tevens wordt er een constante spanning aangelegd tussen de anode (positieve potentiaal) en de kathode (negatieve potentiaal). Geëmitteerde elektronen van de kathode bereiken de anode en laden deze op, waardoor een oscillatie modus wordt aangeslagen waarbij het teken van de lading voor twee naast elkaar gelegen resonatoren tegengesteld is. De oscillaties in de holtes versterken deze oscillaties.

Het hierboven beschreven proces resulteert in een wisselend elektrisch veld met de eerdergenoemde frequentie $f = 2.45$ GHz (blauwe lijnen in Figuur 1(a); het statische veld is niet weergegeven) in de ruimte tussen de kathode en anode, dat bovenop het statische elektrische veld veroorzaakt door de aangelegde constante spanning komt.

In de evenwichtssituatie is de amplitude van het wisselende elektrische veld tussen de anode en kathode ongeveer $\frac{1}{3}$ van de grootte van het statische elektrische veld.

De beweging van de elektronen in de ruimte tussen de kathode en anode wordt beïnvloed door zowel het wisselende als het statische elektrische veld. Hierdoor zullen de elektronen die de anode bereiken, ongeveer 80% van de energie die ze verwerven van het statische veld overbrengen naar het wisselende elektrische veld.

Een klein gedeelte van de geëmitteerde elektronen zal terugkeren naar de kathode en zal daar extra elektronen vrijmaken, om zodoende het wisselende elektrische veld nog meer te versterken.

Elke resonator kan worden voorgesteld door een condensator en spoel, zie Figuur 1(b). De capaciteit C van de condensator wordt hierbij grotendeels bepaald door vlakke delen van de resonator, de zelfinductie L van de spoel wordt voornamelijk bepaald door het cilindrische deel.

Neem aan dat de stroom in de resonator uniform erg dicht bij het oppervlak van de cilindrische holte stroomt. Neem verder aan dat het magnetische veld dat door deze stroom wordt gegenereerd, 0,6 maal zo groot is als bij een ideale oneindig lange spoel.

De verschillende lengtes in de geometrie van de magnetron zijn weergegeven in Figuur 1(b).

De permittiviteit en permeabiliteit van het vacuüm zijn resp. $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ en $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$.

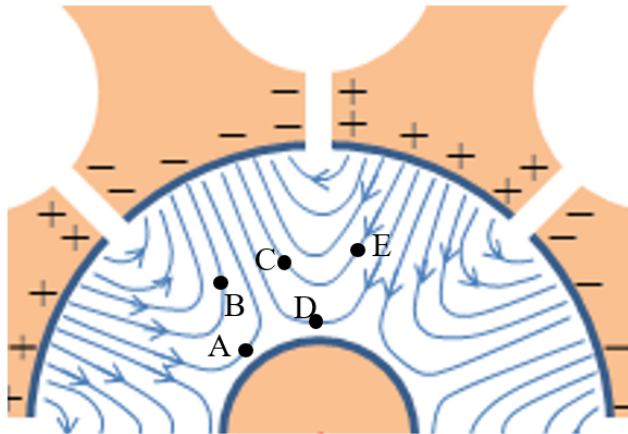
- | | |
|--|-------|
| <p>A.1 Gebruik de bovenstaande informatie om een schatting te maken van de frequentie f_{est} van een enkele resonator. (Je antwoord kan afwijken van de werkelijke waarde, $f = 2.45$ GHz. Gebruik deze werkelijke waarde voor de rest van deze vraag.</p> | 0.4pt |
|--|-------|

Opdracht A.2 hieronder gaat niet over de magnetron zelf, maar helpt om de onderliggende natuurkunde beter te introduceren en te begrijpen. We beschouwen een elektron dat in een vrije ruimte beweegt. Er heerst een uniform elektrisch veld gericht langs de negatieve y as, $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$, en een uniform magnetisch veld gericht langs de positieve z as, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ (E_0 en B_0 zijn positief; $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ zijn eenheidsvectoren gericht volgens de gebruikelijke manier). Stel dat de snelheid van een elektron op een tijdstip t gegeven wordt door $\vec{u}(t)$. The drift snelheid $\vec{u}_D$ van het elektron is gedefinieerd als zijn gemiddelde snelheid. De symbolen m en $-e$ zijn resp. de massa en de lading van het elektron.

- | | |
|---|-------|
| <p>A.2 Vind in elk van de onderstaande twee situaties een uitdrukking voor $\vec{u}_D$. Teken vervolgens op het antwoordblad de baan van het elektron voor de twee gevallen (in het laboratorium stelsel) gedurende het tijdsinterval $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$.</p> <ol style="list-style-type: none"> Op $t = 0$ is de snelheid van het elektron $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$, Op $t = 0$ is de snelheid van het elektron $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$. | 1.5pt |
|---|-------|

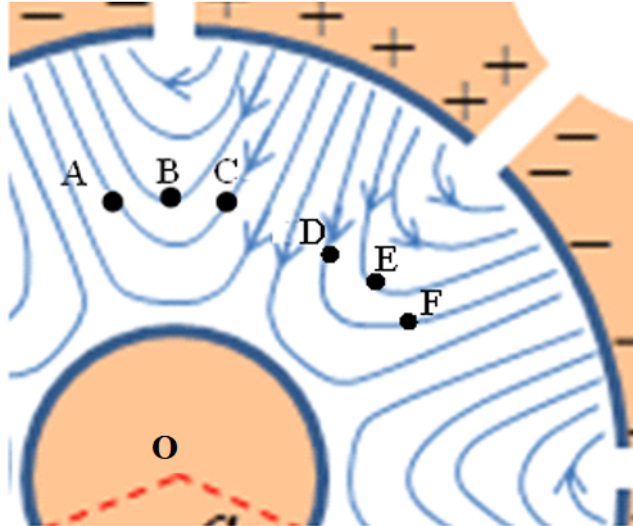
Terug naar de beschrijving van de magnetron. De afstand tussen de kathode en de anode is 15 mm . Neem aan dat vanwege het eerder genoemde energieverlies aan de wisselende velden, de maximale kinetische energie van elk elektron niet groter wordt dan $K_{\text{max}} = 800\text{ eV}$. De statische magnetische veldsterkte is $B_0 = 0.3\text{ T}$. De massa en lading van het elektron zijn respectievelijk $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$ en $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$.

- A.3** Geef een numerieke schatting van de maximale straal r van de baan die het elektron beschrijft in het referentie stelsel waarbij deze beweging vrijwel cirkelvormig is, aangenomen dat dit referentiestelsel bij benadering een inertiaalstelsel is. 0.4pt



Figuur 2

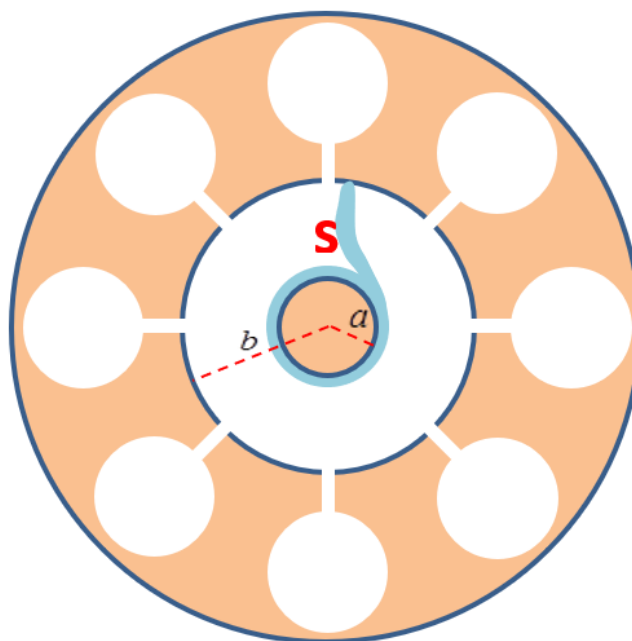
- A.4** Figuur 2 geeft een momentopname van de elektrische veldlijnen van het wisselende elektrische veld tussen de kathode en anode. (Het statische veld is niet weergegeven.) Geef op het antwoordblad aan welke van de elektronen geplaatst in posities A, B, C, D en E richting de anode driften, welke richting de kathode en welke in een richting loodrecht op de straal op dat moment. 1.2pt



Figuur 3

Figuur 3 toont de wisselende elektrische veldlijnen tussen anode en kathode (het statische veld is niet getekend) op een bepaald tijdstip. De posities van zes elektronen op dat moment worden aangegeven met A, B, C, D, E en F. Alle elektronen bevinden zich op dezelfde afstand tot de kathode.

- A.5** Bekijk de situatie die in figuur 3 wordt getoond. Geef op het antwoordblad aan voor elk van de elektronenparen AB, AC, BC, DE en EF aan of hun beweging ervoor zorgt dat de hoek tussen hun positievectoren (gemeten van het centrum O van de kathode) groter wordt of kleiner wordt op dat moment. 1.2pt



Figuur 4



Het patroon dat je in opdracht A.5 hebt gevonden, werkt als een focus mechanisme, dat de elektronen concentreert in de ruimte tussen kathode en anode in spaken. Figuur 4 toont één zo'n spaak, aangegeven met S.

- A.6** Teken op het antwoordblad de andere spaken op dat tijdstip. Geef met pijlen de richting van de rotatie aan en bereken hun gemiddelde hoeksnelheid ω_s . 0.8pt

Ga ervan uit dat het totale elektrische veld halverwege tussen de kathode en de anode gelijk is aan zijn gemiddelde statische waarde over de radiaal van kathode naar anode en dat de spaken bij benadering radiaal zijn in dat gebied. De stralen van kathode en anode (respectievelijk a en b) worden gedefinieerd in figuur 4.

- A.7** Geef een benaderende uitdrukking voor de constante spanning V_0 die nodig is om de magnetron op de beschreven wijze te laten werken. (De uitdrukking die je gaat geven, geeft een benadering van de minimale spanning die nodig is voor de magnetron om te werken; de optimale spanning is iets hoger). 1.1pt

Deel B: De wisselwerking tussen microgolfstraling en watermoleculen (3.4 punten)

Dit deel gaat over het gebruik van microgolfstraling (door de antenne van de magnetron in de voedselruimte gestraald) voor koken. Oftewel: het opwarmen van dielectrisch materiaal zoals zuiver of zoutig water. (Zoutig water is ons model voor bijvoorbeeld soep.)

Een elektrische dipool bestaat uit twee even grote maar tegengestelde ladingen q en $-q$, op een kleine afstand d van elkaar. De elektrische dipoolvector wijst van de negatieve naar de positieve lading en voor zijn grootte geldt $p = qd$.

Een enkele dipool met moment $\vec{p}(t)$ met een constante grootte $p_0 = |\vec{p}(t)|$ wordt in een van de tijd afhankelijk elektrisch veld $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$ geplaatst. De hoek tussen de dipool en het elektrisch veld is gelijk aan $\theta(t)$.

- B.1** Geef uitdrukkingen voor zowel de grootte van het krachtmoment $\tau(t)$ door het elektrische veld op de dipool en het vermogen $H_i(t)$ wat door het veld aan de dipool wordt geleverd, in termen van p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ en hun afgeleiden. 0.5pt

Watermoleculen kunnen beschouwd worden als dipolen. Door de sterke waterstofbindingen tussen watermoleculen in een vloeistof, kun je ze niet als onafhankelijke dipolen beschouwen. Je kunt beter kijken naar de polarisatievector $\vec{P}(t)$, de dichtheid van het dipoolmoment (gemiddeld dipoolmoment per volume-eenheid van een verzameling watermoleculen).

Deze polarisatie $\vec{P}(t)$ staat parallel aan het lokaal aangelegde elektrische veld (van de microgolf straling) $\vec{E}(t)$, en oscilleert met een amplitude evenredig met de amplitude van het lokale wisselende elektrische veld maar met een vertraging in de fase δ .

In het water geldt voor het lokale elektrische veld $\vec{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\hat{x}$ met $\omega = 2\pi f$. Dit zorgt voor polarisatie $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta)\hat{x}$, waarbij de dimensieloze constante β een eigenschap van water is.

- B.2** Geef een uitdrukking voor het tijdgemiddelde vermogen $\langle H(t) \rangle$ per eenheid van volume dat door het water wordt geabsorbeerd. 0.5pt
 Voor een tijdsafhankelijke variabele $f(t)$ wordt het tijdgemiddelde over de periode T gedefinieerd als:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (1)$$

We kijken nu naar de voortplanting van de straling door het water. De relatieve dielektrische constante (bij de elektromagnetische veldfrequentie) is ε_r en de bijbehorende brekingsindex van water is $n = \sqrt{\varepsilon_r}$. De energiedichtheid van het elektrisch veld op een bepaald moment is gegeven door $\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2$.

De tijdgemiddelde energiedichtheden van het elektrische en magnetische veld zijn gelijk aan elkaar.

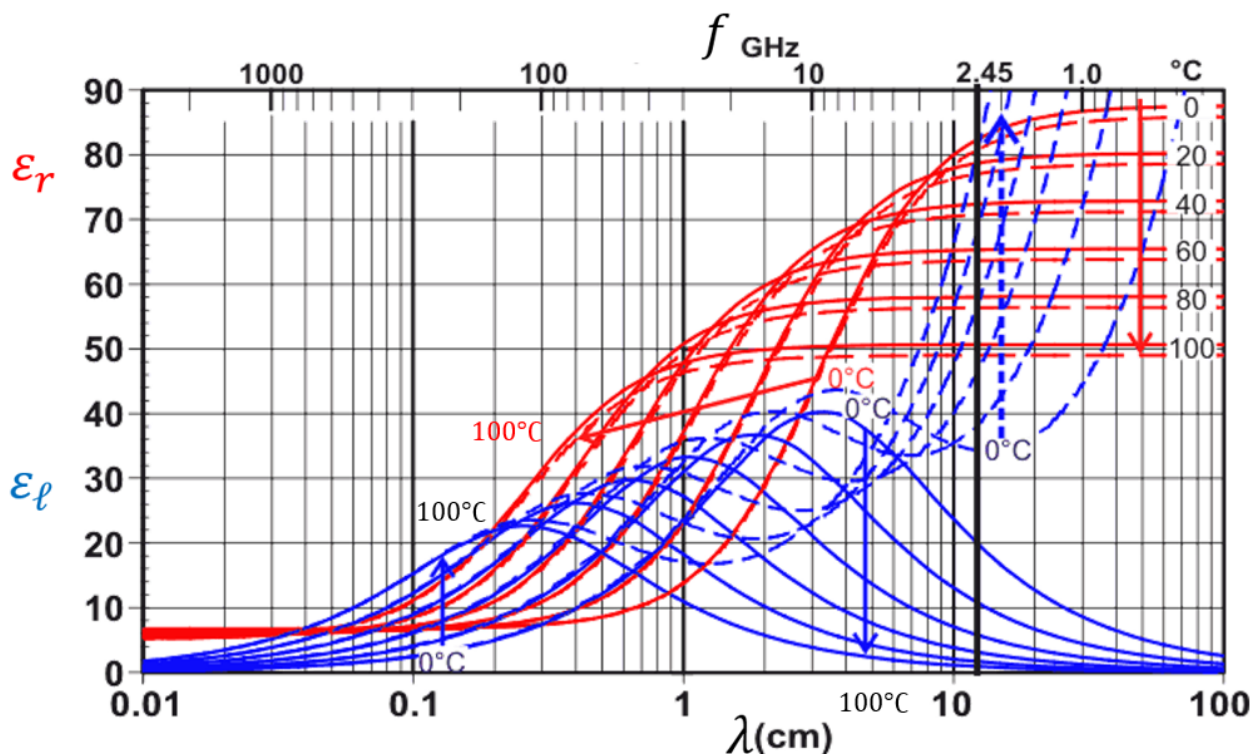
- B.3** We geven de tijdgemiddelde flux van stralingsenergie aan met $I(z)$ (gemiddelde vermogensstroom per eenheid van oppervlakte). Hier is z de doordringingsdiepte in het water en de straling gaat in de richting van z . 1.1pt
 Geef een uitdrukking voor de afhankelijkheid van de fluxdichtheid $I(z)$ van z .
 De fluxdichtheid bij het wateroppervlak, $I(0)$, mag in je antwoord voorkomen.

De vertraging in fase δ komt door de interactie tussen de watermoleculen. Deze hangt af van de dimensionloze dielektrische verliescoëfficiënt ε_ℓ en de relatieve dielektrische constante ε_r (die beiden afhangen van de hoekfrequentie ω van de straling en van de temperatuur) via de relatie $\tan \delta = \varepsilon_\ell / \varepsilon_r$. Als δ klein genoeg is, wordt het elektrisch veld bij de doordringingsdiepte z in het water gegeven door:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \tan \delta} \sin(n k_0 z - \omega t) \quad (2)$$

met $k_0 = \omega/c$ en $c = 3.0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$, de snelheid van licht in vacuüm.

- B.4** Gebruik de benadering $\tan \delta \approx \sin \delta$ en geef een uitdrukking voor de coëfficiënt β , die in opdracht B.2 is gedefinieerd, in termen van de andere parameters. 0.6pt



Figuur 5. De pijlen geven de variatie met temperatuur tussen de curven aan van 0°C naar 100°C.

Figuur 5 beschrijft ϵ_r (blauw) en ϵ_l (rood) voor zuiver water (ononderbroken lijnen) en een verdunde zoutoplossing in water (stippellijnen) als functie van golflengte of frequentie, bij verschillende temperaturen. De hoekfrequentie $\omega = 2\pi \cdot 2.45 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ wordt aangegeven met een dikke lijn. Hieronder beschouwen we alleen microgolfstraling van deze frequentie.

B.5 Maak gebruik van Figuur 5 om onderstaande vragen op te lossen.

0.7pt

1. Bepaal, voor water van 20°C, de doordringingsdiepte $z_{1/2}$, waarbij het vermogen per volume-eenheid is gehalveerd ten opzicht van de waarde bij $z = 0$.
2. Geef op het antwoordblad aan of de doordringingsdiepte van de microgolfstraling in water toeneemt, afneemt of gelijk blijft bij temperatuurstijging.
3. Geef op het antwoordblad aan of de doordringingsdiepte van de microgolfstraling in soep (een verdunde zoutoplossing) toeneemt, afneemt of gelijk blijft bij temperatuurstijging.

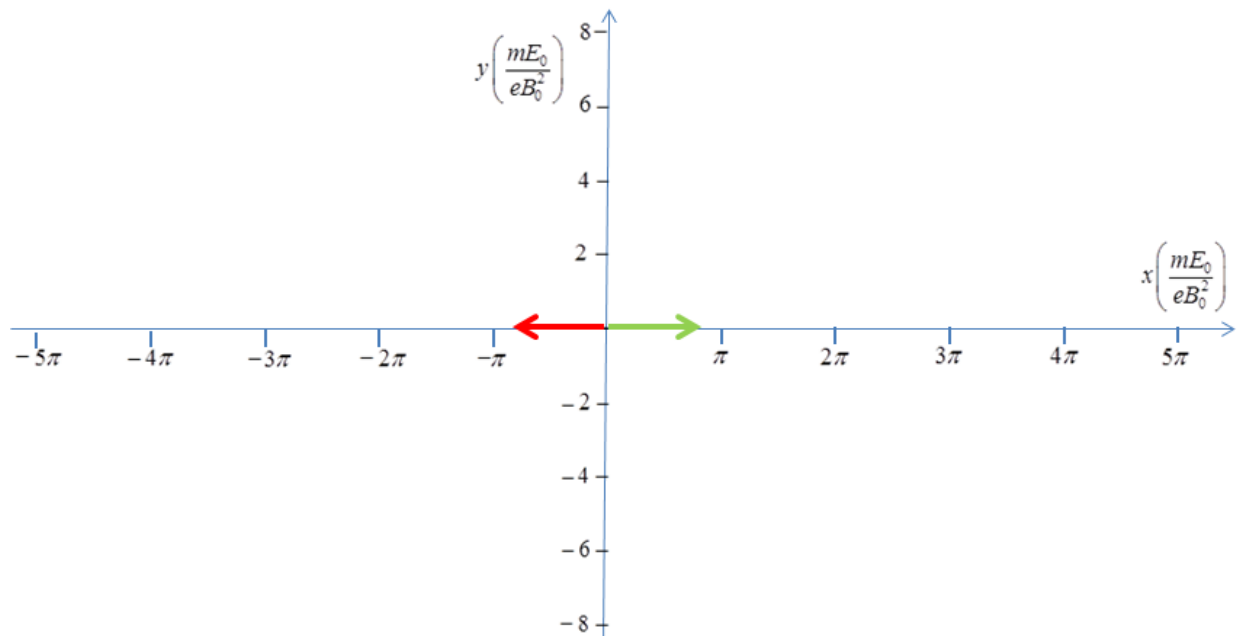
De Natuurkunde van een Microgolfoven - Antwoordblad

Deel A: De structuur en werking van een magnetron (6.6 punten)

A.1 (0.4 pt)

$$f_{\text{est}} =$$

A.2 (1.5 pt)



1. Voor $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$
 $\vec{u}_D =$
2. Voor $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$
 $\vec{u}_D =$

A.3 (0.4 pt)

$$r =$$

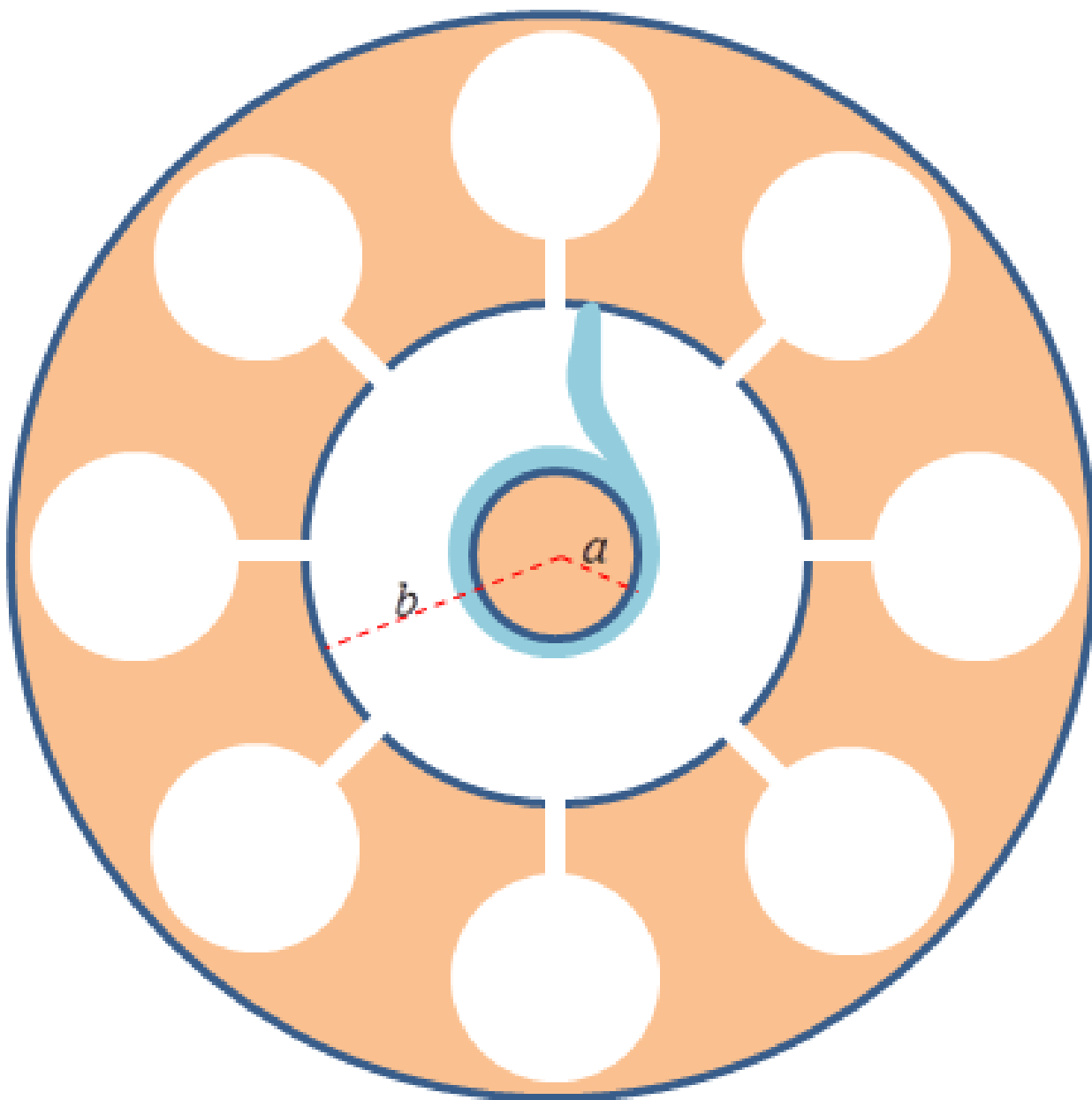
A.4 (1.2 pt)

punt	richting de anode	richting de kathode	loodrecht op de straal
A			
B			
C			
D			
E			

A.5 (1.2 pt)

punten	hoek neemt af	hoek neemt toe	onbepaald
AB			
BC			
CA			
DE			
EF			
DF			

A.6 (0.8 pt)



$\omega_s =$

A.7 (1.1 pt)

$V_0 =$



Deel B: De interactie van microgolf straling met watermoleculen (3.4 punten)

B.1 (0.5 pt)

$$\tau(t) =$$

$$H_i(t) =$$

B.2 (0.5 pt)

$$\langle H(t) \rangle =$$

B.3 (1.1 pt)

$$I(z) =$$

B.4 (0.6 pt)

$$\beta =$$

B.5 (0.7 pt)

$$z_{1/2} =$$

materiaal	$z_{1/2}$ neemt toe met temperatuur	$z_{1/2}$ neemt af met de temperatuur	$z_{1/2}$ blijft hetzelfde	
water				
soep				

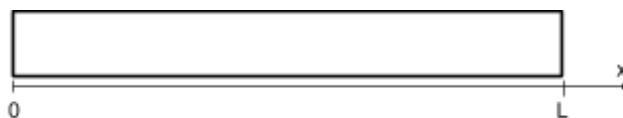
Thermo-akoestische motor

Een thermo-akoestische motor is een machine die warmte omzet in akoestisch vermogen, of geluidsgolven - een vorm van mechanische arbeid. Zoals bij andere warmtepompen, kan deze motor worden omgeschakeld naar een koelmachine, om door middel van geluid warmte te pompen van een koude naar een warmereservoir. De hoge werkzame frequenties reduceren de warmtegeleiding en er is geen afgesloten werkruimte nodig. Anders dan bij andere motoren, heeft de thermo-akoestische motor geen bewegende onderdelen behalve dan het (werk) fluidum zelf. Hou vol!

Het rendement van thermo-akoestische machines is in vergelijking met andere motoren laag, maar ze zijn makkelijker te gebruiken en laag in onderhoudskosten. Dit biedt mogelijkheden voor toepassingen van duurzame energie, zoals zonne-energieparken en het gebruiken van restwarmte. Wij zullen hier alleen de omzetting naar akoestische energie binnen het systeem bestuderen, en laten de extractie of conversie ervan voor de aandrijving van externe apparaten buiten beschouwing.

Geluidsgolven in een afgesloten buis (3.7 punten)

Beschouw een thermische geïsoleerde buis met lengte L en dwarsdoorsnede S met zijn as parallel aan de x richting. De twee uiteinden van de buis liggen op respectievelijk $x = 0$ en $x = L$. De buis is gevuld met een ideaal gas en volledig afgesloten aan beide uiteinden. Bij evenwicht heeft het gas een temperatuur T_0 , druk p_0 en dichtheid ρ_0 . Neem aan dat de viscositeit kan worden verwaarloosd en dat het gas alleen in de x richting beweegt. De eigenschappen van het gas zijn uniform in de loodrechte y en z richting.



Figuur 1

- A.1** Bij een staande geluidsgolf trilt het gas in de x richting met een hoekfrequentie ω . De amplitude van de trilling is afhankelijk van evenwichtspositie x langs de buis. De longitudinale uitwijking van elk gasdeeltje vanuit zijn evenwichtspositie x wordt gegeven door: 0.3pt

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(merk op dat u hier de uitwijking geeft van een gasdeeltje)
 waarbij $a \ll L$ een positieve constante is, $k = 2\pi/\lambda$ het golfgetal en λ de golflengte. Wat is de maximale golflengte, $\lambda_{\max}$, voor het gegeven systeem?

We nemen in deze gehele opgave aan dat $\lambda = \lambda_{\max}$

Beschouw nu een klein gaspakketje in rust tussen x en $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). Als gevolg van de golf uit onderdeel A.1, trilt het pakketje langs de x as, waardoor zijn volume en andere thermodynamische grootheden veranderen. Neem voor de volgende onderdelen aan dat deze veranderingen klein zijn ten opzichte van hun evenwichtswaarden.

- A.2** Het volume $V(x, t)$ van het pakketje oscilleert rond zijn evenwichtswaarde $V_0 = S\Delta x$ volgens 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Geef een uitdrukking voor $V_1(x)$ als functie van V_0 , a , k en x .

- A.3** Neem aan dat als gevolg van de geluidsgolf, de totale druk van het gas wordt gegeven door: 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

Beschouw de krachten die werken op het gaspakketje, en bereken de amplitude $p_1(x)$ van de druk oscillaties (eerste orde term), als functie van de positie x , de evenwichtsdichtheid ρ_0 , de uitwijking amplitude a en de golf parameters k en ω .

Bij akoestische frequenties kan de thermische geleiding van het gas worden verwaarloosd. We zullen de expansie en compressie van het gas als een adiabatisch proces beschouwen, zodat $pV^\gamma = \text{const}$, waarbij γ de adiabatische constante is.

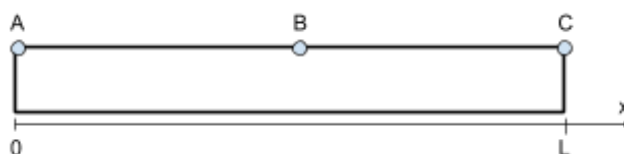
- A.4** Gebruik bovenstaande vergelijking en de resultaten uit voorgaande onderdelen om de snelheid van geluidsgolven $c = \frac{\omega}{k}$ in de buis (eerste orde benadering) te bepalen. Druk je antwoord uit als functie van p_0 , ρ_0 en de adiabatische constante γ . 0.3pt

- A.5** De temperatuursverandering van het gas als gevolg van adiabatische expansie en compressie, als gevolg van de geluidsgolf, wordt gegeven door: 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Bepaal de amplitude $T_1(x)$ van de temperatuur oscillaties als functie van T_0 , γ , a , k en x .

- A.6** Alleen bij dit onderdeel gaan wij ervan uit dat er zwakke thermische interactie is tussen de buis en het gas. Als gevolg hiervan blijft de staande geluidsgolf nagenoeg ongewijzigd. Echter het is mogelijk dat er wat warmteoverdracht is tussen de buis en het gas. Opwarming door viscositeit kan worden verwaarloosd. Geef voor elk van de punten in Figuur 2 (A, C bij de uiteinden van de buis, B in het midden) aan of de temperatuur van de buis in die punten zal toenemen, afnemen of constant zal blijven over een langere periode. 1.2pt

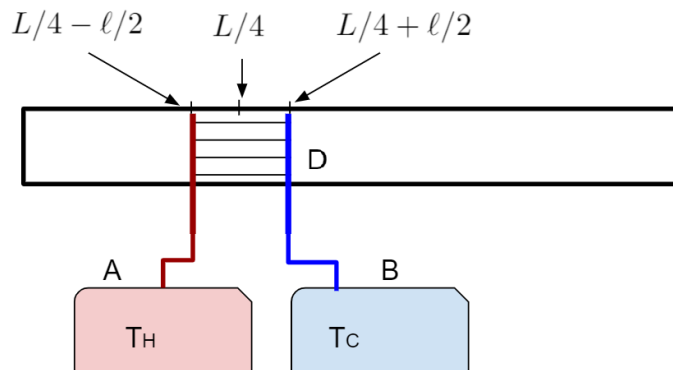


Figuur 2

Deel B: Versterking van geluidsgolven door extern thermisch contact (6,3 punten)

Een stapel dunne platen is gelijk verdeeld en geplaatst in de buis. De platen zijn parallel aan de as van de buis uitgelijnd zodat ze de stroming van gas door de buis niet belemmert. Het midden van de stapel is gepositioneerd op $x_0 = \frac{L}{4}$, en heeft een breedte van $\ell \ll L$ langs de as van buis, zodanig dat deze de gehele dwarsdoorsnede van de buis opvult. De rechter- en linkeruiteinden van de stapel worden op een temperatuurverschil τ gehouden. De linker uiteinde van de stapel bij $x_H = x_0 - \frac{\ell}{2}$ wordt door een extern thermisch reservoir gehouden op temperatuur $T_H = T_0 + \frac{\tau}{2}$. Tegelijkertijd wordt het rechteruiteinde bij $x_C = x_0 + \frac{\ell}{2}$ gehouden op een temperatuur $T_C = T_0 - \frac{\tau}{2}$.

De stapel platen laat een geringe longitudinale warmte stroming toe om een constante temperatuursgradiënt tussen de uiteinden te behouden, zodanig dat $T_{plate}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$



Figuur 3. Een schematische tekening van het systeem. (A) en (B) zijn respectievelijk het warme en koude reservoir. (D) is de stapel van dunne platen.

Om het effect van thermisch contact tussen de stapel van platen en het gas op de geluidsgolven te analyseren, moet het volgende worden aangenomen:

- Net als in deel A, zijn alle veranderingen van de thermische grootheden klein ten opzichte van hun onverstoorde evenwichtswaarden.
- Het systeem opereert in de fundamentele staande golf modus met maximale golflengte. Het is slechts gering gewijzigd door de stapel platen.
- De stapel is veel korter dan de golflengte $\ell \ll \lambda_{\max}$ en kan dus ver van de uitwijking en druk knopen worden geplaatst, zodat de uitwijking $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ en de druk $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ als uniform mogen worden beschouwd over de gehele lengte van de stapeling.
- We mogen randeffecten verwaarlozen die worden veroorzaakt door de het in- en uitstromen van pakketjes door de stapel.
- Het temperatuurverschil tussen de uiteinden van de stapeling met platen, i.e. tussen de warme en koude reservoirs, is klein ten opzichte van de absolute temperatuur: $\tau \ll T_0$.
- Warmtegeleiding door de stapel, door het gas, en langs de buis worden allemaal verwaarloosd. De enige significante bron voor warmteoverdracht is door convectie als gevolg van de stroming van gas en geleiding tussen het gas en de stapel.



- B.1** Beschouw een specifiek gaspakketje, initieel op $x_0 = \frac{L}{4}$, in het gebied van de stapeling. Terwijl het pakketje door de stapeling stroomt, verandert de lokale temperatuur van het nabijgelegen deel van de stapeling als volgt: 0.4pt

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Druk T_{st} uit als functie van a , τ en ℓ .

- B.2** Boven welk kritische temperatuur verschil τ_{cr} zal het gas warmte overdragen (transporteren) van het warme reservoir naar het koude reservoir? Druk τ_{cr} uit in T_0 , γ , k en l . 1.0pt

- B.3** Bepaal de algemene benaderende uitdrukking voor de warmtestroom $\frac{dQ}{dt}$ in een klein gaspakketje als een lineaire functie van zijn volume en drukveranderingen. Druk het antwoord uit als functie van de snelheid van volumeverandering $\frac{dV}{dt}$ en de snelheid van drukverandering $\frac{dp}{dt}$, de niet verstoorte evenwichtswaarden van de druk p_0 en het volume V_0 van het pakketje en de adiabatische constante γ . (Je mag de vergelijking voor de molaire warmtecapaciteit bij constante volume $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ gebruiken, waarbij R de gasconstante is). 0.8pt

De beperkte grootte van de warmtestroom tussen het pakketje en de stapel veroorzaakt een faseverschil tussen de druk- en volume-oscillaties van het pakketje. We bekijken hoe dit leidt tot arbeid.

We gaan ervan uit dat de warmteflux tussen de stapel en het pakketje recht evenredig is met het temperatuurverschil tussen het pakketje en het meest nabije element van de stapel, bij benadering gegeven door $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$. Hierbij zijn T_1 en T_{st} de amplitudes van de temperatuuroscillaties van respectievelijk het gaspakketje en de nabije stapel uit opgaven A.5 en B.1 en $\beta > 0$ is een constante. Veronderstel dat bij de frequenties waarbij de machine actief is, de verandering in temperatuur van het gas als gevolg van deze warmtestroom verwaarloosbaar is in vergelijking met zowel T_1 als T_{st} .

- B.4** Om de arbeid te berekenen, beschouwen we een verandering van het volume van het bewegende pakketje als gevolg van het thermisch contact met de stapel. We beschrijven de invloed van de stapel op de druk en het volume van het pakketje als volgt: 1.9pt

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Zoek de coëfficiënten V_a en V_b als p_a en p_b gegeven zijn. Druk je antwoord uit als functie van p_a , p_b , p_0 , V_0 , γ , τ , τ_{cr} , β , ω , a en ℓ .

- B.5** Zoek een benaderende uitdrukking voor de akoestische arbeid per volume-eenheid w geproduceerd door het gaspakketje gedurende één cyclus. Integreer over het volume van de stapel om de totale hoeveelheid arbeid W_{tot} te verkrijgen die door het gas gedurende één cyclus wordt gegenereerd. Druk W_{tot} uit als functie van γ , τ , τ_{cr} , β , ω , a , k en S . 0.8pt



B.6 Zoek een benaderende uitdrukking voor de warmte Q_{tot} die gedurende één cyclus getransporteerd wordt van de linkerkzijde van het vlak $x = x_0$ naar rechts. Druk je antwoord uit als functie van τ , τ_{cr} , β , ω , a , S en ℓ . (Tip: Je kan gebruik maken van de formule $j = Q \frac{du}{dt}$ voor de warmtestroom als gevolg van convectie.) 0.8pt

B.7 Bepaal het rendement η van de thermo-akoestische motor. Het rendement wordt gedefinieerd als de verhouding van de opgewekte akoestische arbeid tot de warmte die aan het warmtereservoir werd onttrokken. Druk je antwoord uit als functie van het temperatuurverschil τ tussen het warme en koude reservoir, het kritische temperatuurverschil τ_{cr} en het Carnotrendement $\eta_c = 1 - T_C/T_H$. 0.6pt

Thermo-akoestische Motor - Antwoord blad

Deel A: Geluidsgolven in een afgesloten buis (3.7 punten)

A.1 (0.3 pt)

$$\lambda_{\max} =$$

A.2 (0.5 pt)

$$V_1(x) =$$

A.3 (0.7 pt)

$$p_1(x) =$$

A.4 (0.3 pt)

$$c =$$

A.5 (0.7 pt)

$$T_1(x) =$$

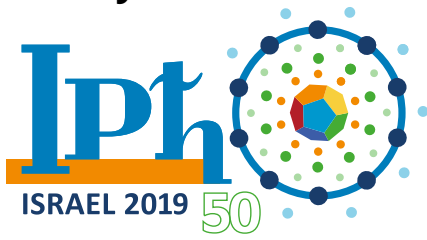
A.6 (1.2 pt)

punt	neemt toe	neemt af	constant
A			
B			
C			

Deel B. Versterking van geluidsgolven door extern thermisch contact (6.3 punten)

B.1 (0.4 pt)

$$T_{\text{st}} =$$



B.2 (1.0 pt)

$$\tau_{\text{cr}} =$$

B.3 (0.8 pt)

$$\frac{dQ}{dt} =$$

B.4 (1.9 pt)

$$V_a =$$

$$V_b =$$

B.5 (0.8 pt)

$$W_{\text{tot}} =$$

B.6 (0.8 pt)

$$Q_{\text{tot}} =$$

B.7 (0.6 pt)

$$\eta =$$