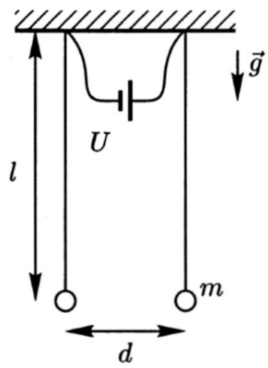
Eindronde Natuurkunde Olympiade 2019 Antwoorden

Opgave 1 Elektrisch pingpong (Rusland 2014)

(a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}0\ \text{s}$



(b) Op een bol komt nu langzaam een lading $\pm q$. Omdat $r \ll d$, kunnen we de bollen als een puntlading beschouwen. Voor kleine hoeken geldt $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$. Je kunt dan voor de coulombkracht schrijven:

$$F_q = \frac{kq^2}{(d-2\alpha l)^2}$$

En deze moet gelijk zijn aan de nettokracht van zwaartekracht en spankracht in het touw $F_p = mg\alpha$

$$k\frac{q^2}{(d-2\alpha l)^2} = mg\alpha$$
$$k\frac{q^2}{mg} = \alpha(d-2\alpha l)^2$$

De functie $f(\alpha) = \alpha(d-2\alpha l)^2$ heeft een maximum bij $\alpha_0 = d/(6l)$. Bij een grotere q is er geen hoek meer voor een evenwicht en zullen de bollen verder naar elkaar toe blijven bewegen. Dit komt overeen met de maximumlading van een bol om te botsen. Dus geldt:

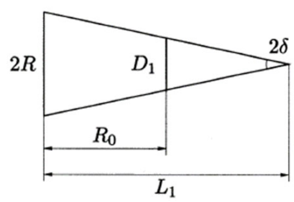
$$q^2 = \frac{mg\alpha(d-2\alpha l)^2}{k} = \frac{2mgd^3}{27kl} \rightarrow q_{\max} = \sqrt{\frac{2mgd^3}{27kl}}$$

Er is een iets kleinere lading nodig nadat de bollen deze maximale lading hebben gehad en de bollen zullen daarna snel tegen elkaar aan komen. Het potentiaalverschil tussen de bollen bij de berekende lading is daarmee:

$$U_{\min} = \varphi_+ - \varphi_- = k\frac{q_{\max}}{r} - \left(-k\frac{q_{\max}}{r}\right) = 2\sqrt{\frac{2kmgd^3}{27lr^2}} = 64{,}6\ \text{kV}.$$

(c) Omdat $U_{\min} \ll 10^6$ V Kunnen we de stroom constant veronderstellen en gelijkstellen aan U/R. De benodigde tijd voor de benodigde lading is dan $t = \frac{q_{\max}}{I} = \frac{U_{\min}r}{2k}\frac{R}{U_0} = 18$ s.

Opgave 2 Maansverduistering (Rusland 2017)



We nemen aan dat er geen breking in de aarde atmosfeer is.
De stralen van de zon zullen dan onder dezelfde hoek convergeren als we de zon vanaf de aarde zien, 2δ. Je kunt dan schrijven: $L_1 = R/\delta \approx 1{,}4 \cdot 10^6$km.

Voor de maan geldt $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{GM_E}{R_0^3}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R_0^3}}$.

Waarmee $R_0 = \sqrt[3]{\frac{gT_0^2R^2}{4\pi^2}} \approx 384 \cdot 10^3$km.

De diameter van de maan is dan: $D = 2\delta R_0 = 3{,}45 \cdot 10^3$km.

De kernschaduw op de plaats van de maan $D_1 = 2R\left(1 - \frac{R_0}{L_1}\right) \approx 9{,}3 \cdot 10^3$km.

Daarmee duurt de totale verduistering:
$T = \frac{D_1 - D_2}{\omega_0 R_0} = T_0\frac{D_1 - D_2}{2\pi R_0} \approx 1{,}6$ uur.

Opgave 3 Botsen met ballen (es-2008)

(a) Tijdens de eerste botsing kunnen we het effect van de veer verwaarlozen. Tijdens de botsingstijd bewegen de ballen nauwelijks, wordt de veer niet ingedrukt en oefent geen kracht op de linkerbal uit. De elastische botsing zorgt dat de meest linkse bal stil gaat staan en de tweede bal met de eerdere snelheid v verder gaat. De rechterbal is dan nog in rust, zodat het massamiddelpunt van het systeem met een snelheid $\frac{1}{2}v$ verder gaat.

(b) Na de eerste botsing oscilleert het veer-massa-systeem rond zijn massamiddelpunt met $\omega = \sqrt{2k/m}$. Met energiebehoud kun je zien dat, wil de laatste bal een snelheid v krijgen, de andere ballen stil moeten liggen. Daarom moet bij een botsing van de derde met de vierde bal, de derde bal een snelheid v hebben en de andere ballen (ook de tweede) dus stil liggen. Dit is in tegengestelde fase met de situatie net na de eerste botsing. De tijd van bewegen van het veer-ballen-systeem moet dus een geheel en een halve trillingstijd $T = 2\pi\sqrt{m/2k}$ zijn. De veer is dan weer ontspannen en de afgelegde weg van het massamiddelpunt is daarmee ook precies L.

$v = \frac{x}{t}$. Hier betekent dat $\frac{1}{2}v = \frac{L}{T\left(n+\frac{1}{2}\right)}$, dus $L = \frac{v}{2}T\left(n+\frac{1}{2}\right) = \pi v(n+\frac{1}{2})\sqrt{m/_{2k}}$.

Opgave 4 Cilinder kantelen

(a) Om de druk te berekenen moet de voorwaarde van mechanisch worden gebruikt. De druk die het gas heeft is gelijk aan de druk die op het gas wordt uitgeoefend. Deze is gelijk aan de druk van de atmosfeer plus de druk die veroorzaakt wordt de zwaartekracht op de massa van de zuiger verdeeld over het oppervlak van de zuiger:

$$p_{gas} = p_{atm} + p_{zuiger} = 1.00\,\text{bar} + \frac{M_{zuiger} \times g}{O_{zuiger}}$$

$$= 1.00 \times 10^5\,\text{N} \cdot \text{m}^{-2} + \frac{20.00\,\text{kg} \times 10.0\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{0.01\,\text{m}^2} = 1.20 \times 10^5\,\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$$

(b) Het volume van het gas volgt uit de temperatuur, aantal mol en de druk, volgens de ideale gaswet (gegeven is dat het gas een ideaal gas is). Uit het volume en het oppervlak kan dan de lengte van de gaskolom worden berekend:

$$pV = nRT \Rightarrow l \times O = \frac{nRT}{p} \Rightarrow l = \frac{nRT}{pO}$$

$$= \frac{2.00\,\text{mol} \times 8.314\,\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 300\,\text{K}}{1.20 \times 10^5\,\text{N} \cdot \text{m}^{-2} \times 0.01\,\text{m}^2} = 4.16\,\text{m}$$

(c) Nadat de cilinder horizontaal is neergelegd zal het gas expanderen omdat de externe druk nu lager is dan de gasdruk - immers de zwaartekracht werkt niet meer op de zuiger in de richting waarin de gaskolom kan expanderen of krimpen. Uiteindelijk zal er weer mechanisch evenwicht moeten zijn, ofwel de uiteindelijk druk van het gas moet 1,00 bar zijn.

De temperatuur blijft echter niet constant! Omdat het gas thermisch geisoleerd is, is de expansie adiabatisch. De expansie is echter niet reversibel, zodat de formule voor reversibele adiabatische expansie niet mag worden gebruikt. Wel geldt uiteraard de eerste hoofdwet, met $Q = 0$. De arbeid kan worden uitgedrukt in the lengteverandering en de constante externe druk. De verandering in interne energie is tegengesteld aan de arbeid die verricht wordt door het gas, maar tevens ook te schrijven in termen van de verandering van temperatuur:

$$\Delta U = Q - W \overset{adiabatisch}{\underset{Q=0}{=}} -W = -\int_{V_i}^{V_f} p_{ext}\, dV = -\int_{l_i}^{l_f} p_{ext} O\, dl = -p_{ext} O\left(l_f - l_i\right)$$

$$dU = C_V dT + \pi_T dV \overset{ideaal}{\underset{\pi_T=0}{=}} C_V dT \overset{C_V const.}{\Rightarrow} \Delta U = C_V \Delta T = nc_V\left(T_f - T_i\right)$$

Tenslotte kan de ideale gaswet worden gebruikt om temperatuur en lengte van de gaskolom aan elkaar te relateren. Hierdoor kan de uiteindelijke lengte worden berekend, en daarmee de temperatuur (of andersom):

$$\left.\begin{aligned} &\Delta U = nc_V\left(T_f - T_i\right) = nc_V\left(\frac{p_f V_f}{nR} - \frac{p_i V_i}{nR}\right) = \frac{c_V O}{R}\left(p_f l_f - p_i l_i\right) \\ &\Delta U = -p_{ext} O\left(l_f - l_i\right) = -p_f O\left(l_f - l_i\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{c_V}{R} p_f l_f + p_f l_f = \frac{c_V}{R} p_i l_i + p_f l_i \Rightarrow l_f = \frac{l_i\left(\frac{c_V}{R} p_i + p_f\right)}{p_f\left(1 + \frac{c_V}{R}\right)} = \frac{\left(\frac{c_V}{R}\frac{p_i}{p_f} + 1\right)}{\left(1 + \frac{c_V}{R}\right)} l_i$$

$$= \frac{\left(4.000\frac{1.20\,\mathrm{bar}}{1.00\,\mathrm{bar}} + 1\right)}{\left(1 + 4.000\right)} 4.16\,\mathrm{m} = 4.82\,\mathrm{m}$$

$$l = \frac{nRT}{pO} \Rightarrow T_f = \frac{p_f O l_f}{nR} = \frac{1.00 \times 10^5\,\mathrm{N\cdot m^{-2}} \times 0.01\,\mathrm{m}^2 \times 4.82\,\mathrm{m}}{2.00\,\mathrm{mol} \times 8.314\,\mathrm{N\cdot m\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}} = 290\,\mathrm{K}$$

(d) De entropie van de omgeving verandert niet (of miniem). Omdat het proces adiabatisch is, wordt er geen energie door warmte-overdracht uitgewisseld met de omgeving en is de entropieverandering volgens de formule van Clausius nul. (Strikt genomen zou de entropie iets afnemen omdat het volume van de omgeving iets afneemt - dit is echter verwaarloosbaar omdat de verhouding van de volumes zo goed als gelijk is aan 1.)
Voor een ideaal gas geldt, dat de entropieverandering gegeven is door:

$$\Delta S = C_V \ln\frac{T_f}{T_i} + nR\ln\frac{V_f}{V_i} = nc_V \ln\frac{T_f}{T_i} + nR\ln\frac{l_f}{l_i} = nR\left(4.000\ln\frac{290}{300} + \ln\frac{4.82}{4.16}\right)$$

$$= 2.00\,\mathrm{mol} \times 8.314\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}} \times \left(-0.136 + 0.147\right) = +0.183\,\mathrm{J\cdot K^{-1}} > 0$$

De totale entropieverandering is dus positief en daarmee is aangetoond dat het proces spontaan verloopt (het voldoet aan de tweede hoofdwet).

Opgave 5 Brugschakeling van Owen (physics by example 155)

(a) Als de brug in balans is, is de spanning bij de detector nul en dus in de schakeling gelijk. Als we de impedanties van de verschillende takken noteren als Z_1 enzovoorts, dan moet in balans gelden:
$\frac{Z_1}{Z_1+Z_2} = \frac{Z_3}{Z_3+Z_4}$ wat je kunt schrijven als: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$ of $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$.

Voor de impedanties geldt:
$Z_1 = R_1 + i\omega L_1,\ \ Z_2 = R_2,\ Z_3 = R_3 + \frac{1}{i\omega C_3},\ Z_4 = \frac{1}{i\omega C_4}$
Met het vorige wordt dat $\frac{R_1}{i\omega C_4} + \frac{L_1}{C_4} = R_2 R_3 + \frac{R_2}{i\omega C_3}$
Door de reele en imaginaire delen aan elkaar gelijk te stellen vind je dan:
$R_1 = \frac{R_2 C_4}{C_3}$ en $L_1 = C_4 R_3 R_4$
Hierin staat geen frequentie genoemd, de brug is dus frequentie onafhankelijk.

(b) Door de waarden in te vullen vind je: $R_1 = 0{,}31\Omega$ en $L_1 = 8{,}0\text{mH}$.

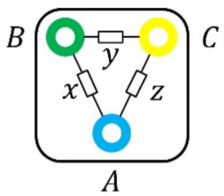
Opgave 6 Bellenvat-foto van een elektron dat z'n energie verliest

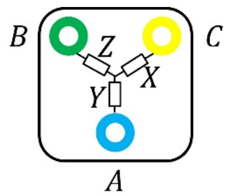
(a) $\frac{mv^2}{R} = Bqv$ zodat $p = mv = BqR$

(b) Voor de impuls geldt $p = \gamma\beta mc$ zodat $\gamma\beta = \frac{BqR}{mc}$
Uit de afmetingen van de baan volgt dat de orde van grootte van de R is $0{,}1\ \text{m}$.
Dan volgt $\gamma\beta = 70$
Zodat $\beta = \sqrt{(\gamma\beta)^2 + 1} = 71$ en $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}99899.$

(c) $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = p^2c^2 \rightarrow E = pc$
dus $\frac{dE}{dt} = c\frac{dp}{dt} = c \cdot Bq\frac{dR}{dt} = c \cdot Bq \cdot (-kR) = -k \cdot pc = -kE$ en
$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = -k$$

BONUS 1 Blackbox





(a) Met de gegeven randcondities zijn er maar 2 mogelijkheden: de drieweerstanden in een driehoek of de weerstanden in een ster. Zie hiernaast.

(b) Eerste situatie:
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{1{,}0} \rightarrow x(y+z) = x+y+z$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{2{,}0} \rightarrow y(x+z) = 2(x+y+z)$$
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3{,}0} \rightarrow z(x+y) = 3(x+y+z)$$
Door de derde vergelijking af te trekken van de som van eerste en tweede volgt: $2xy = 0$. Dit is niet mogelijk omdat x en y niet 0 zijn. De enige mogelijkheid is dat z een 'oneidige' oftewel zeer grote weerstandswaarde heeft. Dan volgt dat $x = 1$ en $y = 2$.
Tweede situatie:
$$Y + Z = 1$$
$$X + Z = 2$$
$$X + Y = 3$$
Hieruit volgt: $X = 2, Y = 1$ en $Z = 0$. Deze laatste kan niet dus deze configuratie valt af.

Opgave 7 Volleybal (Tallin 2003)

(a) $F = \Delta pS$ met $S = \pi r^2$ het oppervlak tegen de plaat. Het is eenvoudig in te zien dat geldt: $r^2 = h(2R - h)$. Dus volgt: $F = \Delta pS = \Delta p\pi h(2R - h) \approx 120\ \mathrm{N}$.

(b) Tijdens de botsing wordt de bal vervormd zoals in de figuur te zien is. De bal is niet rekbaar dus behoudt zijn vorm (behalve op de plek waar de bal de wand raakt). Door gebruik te maken van $h \ll R$ kan de kwadratische term van h verwaarloosd worden: $r^2 = h(2R - h) = 2Rh$.
Dus gedraagt de kracht F zich evenredig met h dus de bal gedraagt zich als een veer met veerconstante $k = 2\pi R\Delta p$.
Passen we energiebehoud toe op de botsing dan volgt:
$$mv^2 = 2\pi R\Delta p h^2$$
Invullen van gegevens: $h \approx 11\ \mathrm{mm}$.

(a) De duur is de helft van de harmonische periodieke beweging:
$$\tau = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} = \pi\sqrt{\frac{m}{2\pi R\Delta p}} = \sqrt{\frac{\pi m}{2R\Delta p}} \approx 18\ \mathrm{ms}$$

Opgave 8 Draaimolen(NS-105b-2005-2-2)

(a) $L_{\mathrm{voor}} = L_{\mathrm{na}}$, $mvr\sin\theta = I\omega$, $I = \frac{1}{2}Mr^2 + mr^2$. Hieruit volgt $\omega = \frac{2mv\sin\theta}{(M+2m)r}$

(b) $U_{\mathrm{voor}} = \frac{1}{2}mv^2$, $U_{\mathrm{na}} = \frac{1}{2}I\omega^2$. $\Delta U = \frac{1}{2}mv^2\left(1 - \frac{2m\sin^2\theta}{M+2m}\right)$

Opgave 9 Bol aan draad (200 More Puzzling Physics Problems)

Voor een condensator met capaciteit C en een initiële lading Q_0 geldt dat als de condensator ontlaadt via een weerstand R dat de lading $Q(t)$ gegeven wordt door:
$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$
De ‘halfwaardetijd’ is de tijd om tot $Q_0/2$ te ontladen:
$$T_{1/2} = RC\ln 2$$
Het is dus zaak om R en C te bepalen.
Voor de bolcondensator met straal r_0 en een lading Q geldt dat de potentiaal t.o.v. een referentiepunt in het oneindige gegeven wordt door $Q/4\pi\varepsilon_0 r_0$. Voor de capaciteit geldt dus:
$$C = 4\pi\varepsilon_0 r_0$$
Om de weerstand R te bepalen beschouwen we eerst een bolschil straal r met dikte Δr om de bol heen. Voor de weerstand van deze bolschil geldt:
$$\Delta R = \rho\frac{\Delta r}{4\pi r^2}$$
De totale weerstand is een serieschakeling van allemaal bolschillen:
$$R = \sum \Delta R = \frac{\rho}{4\pi}\sum\frac{\Delta r}{r^2}$$
Deze som gaat over in een integraal:
$$R = \frac{\rho}{4\pi}\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi r_0}$$
Beide resultaten invullen levert:
$$T_{1/2} = RC\ln 2 = \frac{\rho}{4\pi r_0}4\pi\varepsilon_0 r_0\ln 2 = \varepsilon_0\rho\ln 2$$
Dit is onafhankelijk van de straal van de bol!

Opgave 10 Transparante film (Tallin 2004)

De kleine oscillaties komen door diffractie in de film. Het grote verloop komt meer door min of meer absorptie. Het licht valt recht in, bij maxima is de dikte van de film dus een geheel aantal golflengten.

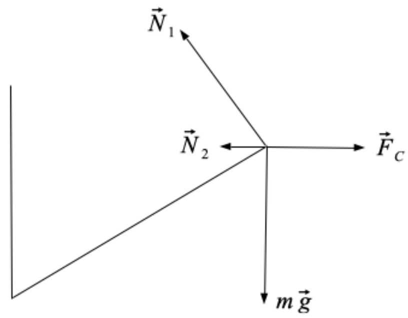
Dan geldt dus $2dn = \lambda N = \frac{cN}{f}$.

Dus geldt $2dnf = cN$ en $2dn(f + \delta f) = c(N + 1)$.

Dan is $2dn\delta f = c$ en geldt $d = c/2n\delta f$.

Voor een goede meting nemen we een groter interval dan 1, bijvoorbeeld $\Delta f = 80\mathrm{THz}$ en tellen het aantal maxima, ongeveer 34. Dan is $\delta f = \frac{80}{34} = 2{,}35\mathrm{THz}$, en dan geldt $d \approx 50\mu\mathrm{m}$.

Opgave 11 Roterende rail



(a) F_C is de centrifugaal-kracht
N_1 is de normaalkracht van de rail
N_2 is de normaalkracht van de stop aan het eind van de rail

(b) $F_c = m\omega^2 L \sin\alpha$

(c) De hoeksnelheid bereikt de kritische warde als $N_2 = 0$ wordt. Dan volgt uit de krachten:

$$\tan\alpha = \frac{mg}{F_C}$$

Met $F_c = m\omega^2 L \sin\alpha$ volgt dan:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{L\sin^2\alpha}}$$

(d) Het traagheidsmoment wordt kleiner. Vanwege behoud van impulsmoment neemt de hoeksnelheid toe.

(e) Met de kogel bovenaan de rail is het traagheidsmoment:

$$I_0 = \tfrac{1}{2}MR^2 + \tfrac{2}{5}m(L\sin\alpha)^2$$

Met de kogel beneden is

$$I_1 = \tfrac{1}{2}MR^2$$

Oftewel dan is de verhouding:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{4}{5}\frac{m}{M}\left(\frac{L}{R}\right)^2 \sin^2\alpha}$$

Opgave 12 Dieselmotor

Volgens het equipartitietheorema geldt voor twee-atomige gassen:

$$E = \frac{f}{2}NkT$$

Met f gelijk aan 5 (drie bewegingsvrijheden en twee rotatievrijheden).

Bij adiabatische compressie geldt dat de inwendige energie zal toenemen:

$$\Delta E = Q + W = W$$

Met W de op het systeem verrichtte arbeid.

Dan volgt:

$$dE = \frac{f}{2}NkdT = -pdV$$

Door de algemene gaswet $pV = NkT$ te gebruiken, oftewel:

$$p = \frac{NkT}{V}$$

kan dE anders geschreven worden:

$$\frac{f}{2}\frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V}$$

Door beide kanten te integreren van situatie 1 naar situatie 2 krijgen we:

$$\frac{f}{2}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = -\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

En dat kan ook geschreven worden als:

$$V_2 T_2^{f/2} = V_1 T_1^{f/2}$$

Voor dit probleem geeft dat:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/f} = 300 \cdot (20)^{2/5} = 300 \cdot 3{,}31 \approx 1000 \text{ K}$$

Deze temperatuur is voldoende hoog om dieselgas te ontsteken.

BONUS 2 Economische zuinigheid

We nemen voor het gemak aan dat de weerstanden van de gloeilampen zich Ohm's gedragen. Dat is in werkelijkheid uiteraard niet het geval maar voor deze situatie voldoende om goede uitspraken te kunnen doen.
Stel dat de (normale) spanning U is. Dan volgt:

$$R_i = \frac{U^2}{W_i}$$

Waarin W_i het vermogen van de gloeilamp is als deze juist is aangesloten.
Als de lampen in serie worden aangesloten, geldt voor de stroom:

$$I = U/(R_A + R_B)$$

Voor het vermogen P_i ($i = A$ of B) geldt dan:

$$P_i = R_i I_i^2 = \frac{U^2}{W_i}\left(\frac{U}{(U^2/W_A) + (U^2/W_B)}\right)^2$$

Voor de afgesproken vermogens ($W_A = W_B = 100$ W) volgt dat $P_A = P_B = 25$ W.
(Ook snel in te zien vanwege halvering van zowel stroom als spanning.)
Maar bij de gebruikte lampen ($W_A = 200$ W) en ($W_B = 50$ W) volgt dat $P_A = 8$ W en $P_B = 32$ W.
Bij een lamp van 8 W valt niet te studeren. Student A haalt de tentamens niet.
Student B lijkt een dubbele winnaar: de student betaalt ook maar voor $(8 + 32)/2 = 20$ W.
Maar het is maar de vraag of bij een lamp van 32 W goed gestudeerd kan worden.