

LIGO-GW150914 (10 points)

In 2015, the gravitational-wave observatory LIGO detected, for the first time, the passing of gravitational waves (GW) through Earth. This event, named GW150914, was triggered by waves produced by two black holes that were orbiting on quasi-circular orbits. This problem will make you estimate some physical parameters of the system, from the properties of the detected signal.

Part A: Newtonian (conservative) orbits (3.0 points)

- A.1** Consider a system of two stars with masses M_1, M_2 , at locations $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, respectively, with respect to the center-of-mass of the system, that is, 1.0pt

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

The stars are isolated from the rest of the Universe and moving at non-relativistic velocities. Using Newton's laws, the acceleration vector of mass M_1 can be expressed as

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

where $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$. Find $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$, where G is Newton's constant [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$].

- A.2** The total energy of the 2-mass system, in circular orbits, can be expressed as: 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

where

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

are the *reduced mass* and *total mass* of the system, Ω is the angular velocity of each mass and L is the total separation $L = r_1 + r_2$. Obtain the explicit form of the term $A(\mu, \Omega, L)$.

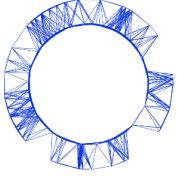
- A.3** Equation 3 can be simplified to $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$. Determine the number β . 1.0pt

Part B: Introducing relativistic dissipation (7.0 points)

The correct theory of gravity, *General Relativity*, was formulated by Einstein in 1915, and predicts that gravity travels with the speed of light. The messengers carrying information about the interaction are called GWs. GWs are emitted whenever masses are accelerated, making the system of masses lose energy.

Consider a system of two point-like particles, isolated from the rest of the Universe. Einstein proved that for small enough velocities the emitted GWs: 1) have a frequency which is twice as large as the orbital frequency; 2) can be characterized by a luminosity, i.e. emitted power $\mathcal{P}$, which is dominated by Einstein's

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

NLD-S-1 T-1 Q-2

Q1-2

English (Official)

quadrupole formula,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

Here, c is the velocity of light $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s. For a system of 2 pointlike particles orbiting on the $x - y$ plane, Q_{ij} is the following table (i, j label the row/column number)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad Q_{33} = -\sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

and $Q_{ij} = 0$ for all other possibilities. Here, (x_A, y_A) is the position of mass A in the center-of-mass frame.

- B.1** For the circular orbits described in A.2 the components of Q_{ij} can be expressed as a function of time t as: 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

Determine k in terms of Ω and the numerical values of the constants a_i, b_i, c_{ij} .

- B.2** Compute the power $\mathcal{P}$ emitted in gravitational waves for that system, and obtain: 1.0pt

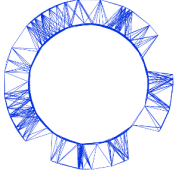
$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

What is the number ξ ? [If you could not obtain ξ , use $\xi = 6.4$ in the following.]

- B.3** In the absence of GW emission the two masses will orbit on a fixed circular orbit indefinitely. However, the emission of GWs causes the system to lose energy and to slowly evolve towards smaller circular orbits. Obtain that the rate of change $\frac{d\Omega}{dt}$ of the orbital angular velocity takes the form 1.0pt

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

where M_c is called the *chirp mass*. Obtain M_c as a function of M and μ . This mass determines the increase in frequency during the orbital decay. [The name "chirp" is inspired by the high pitch sound (increasing frequency) produced by small birds.]



- B.4** Using the information provided above, relate the orbital angular velocity Ω with the GW frequency f_{GW} . Knowing that, for any smooth function $F(t)$ and $a \neq 1$, 2.0pt

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

where χ is a constant and t_0 is an integration constant, show that (10) implies that the GW frequency is

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

and determine the constant p .

On September 14, 2015 GW150914 was registered by the LIGO detectors, consisting of two L-shaped arms, each 4 km long. These arms changed by a relative length according to Fig. 1. The arms of the detector respond linearly to a passing gravitational wave, and the response pattern mimics the wave. This wave was created by two black holes on quasi-circular orbits; the loss of energy through gravitational radiation caused the orbit to shrink and the black holes to eventually collide. The collision point corresponds, roughly, to the peak of the signal after point D, in Fig. 1.

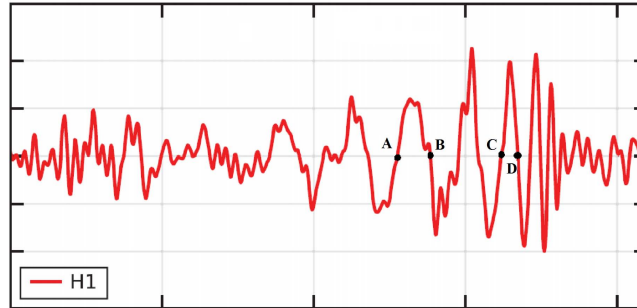


Figure 1. Strain, i.e. relative variation of the size of each arm, at the LIGO detector H1. The horizontal axis is time, and the points A, B, C, D correspond to $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ seconds, respectively.

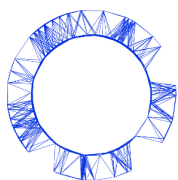
- B.5** From the figure, estimate $f_{\text{GW}}(t)$ at 1.0pt

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{and} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

Assuming that (12) is valid all the way until the collision (which strictly speaking is not true) and that the two objects have equal mass, estimate the chirp mass, M_c , and total mass of the system, in terms of solar masses $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

- B.6** Estimate the minimal orbital separation between the two objects at $t_{\overline{CD}}$. Hence estimate a maximum size for each object, R_{max} . Obtain $R_\odot/R_{\text{max}}$ to compare this size with the radius of our Sun, $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km. Estimate also their orbital linear velocity at the same instant, v_{col} , comparing it with the speed of light, v_{col}/c . 1.0pt

Theory



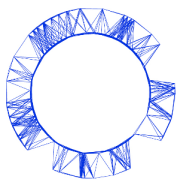
IPhO 2018
Lisbon, Portugal

NLD-S-1 T-1 Q-4

Q1-4

English (Official)

Conclude that these are extremely fast moving, extremely compact objects indeed!



LIGO-GW150914 (10 punten)

In 2015 detecteerde het gravitatiegolven-observatorium LIGO voor de eerste keer het passeren van gravitatiegolven (gravitational waves, GW) door de aarde. Deze gebeurtenis, GW150914 genaamd, werd geactiveerd door golven geproduceerd door twee zwarte gaten die in quasi-cirkelvormige banen bewogen. In deze opgave ga je een aantal fysische parameters van het systeem schatten, op basis van de eigenschappen van het gedetecteerde signaal.

Deel A. Newtonse (conservatieve) banen (3.0 punten)

- A.1** Beschouw een systeem van twee sterren met massa's M_1, M_2 , op respectievelijke posities $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, ten opzichte van het zwaartepunt van het systeem, oftewel: 1.0pt

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

De twee sterren zijn geïsoleerd van de rest van het heelal en bewegen met niet relativistische snelheden. Door gebruik te maken van de wetten van Newton geldt voor de versnellingsvector van M_1 :

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

hierin is $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$.

Bereken $n \in \mathbb{N}$ en $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$,

hierin is G de gravitatieconstante [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{N.m}^2 \text{kg}^{-2}$].

- A.2** De totale energie van het 2-massa systeem, in cirkelbanen, kan geschreven worden als: 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

waarin

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

respectievelijk de *gereduceerde massa* en *totale massa* van het systeem zijn.

Verder is Ω de hoeksnelheid van beide massa's en L is de totale onderlinge afstand (separation) $L = r_1 + r_2$.

Leid de expliciete uitdrukking voor de term $A(\mu, \Omega, L)$ af.

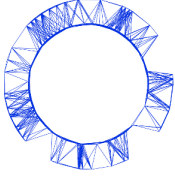
- A.3** Vergelijking (3) kan vereenvoudigd worden tot $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$. Bereken het getal β . 1.0pt

Deel B. introductie van relativistische dissipatie (7.0 punten)

Einstein formuleerde de correcte gravitatietheorie, de algemene relativiteitstheorie, in 1915. Deze voorspelt dat gravitatiekracht zich met de lichtsnelheid voortplant. De gravitatiegolven bevatten informatie over interactie tussen objecten. Deze gravitatiegolven noemen we GWs. GWs worden uitgezonden als massa's versnellen. Daardoor verliest het systeem energie.

Ga uit van een systeem van twee puntmassa's, die geïsoleerd zijn van de rest van het universum. Voor voldoende lage snelheden bewees Einstein voor de uitgezonden GWs: 1) Ze hebben een frequentie die

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

NLD-S-1 T-1 Q-2

Q1-2

NLD (Netherlands)

twee maal zo groot is als de frequentie van de baan; 2) Ze kunnen gekarakteriseerd worden door een helderheid, ofwel uitgezonden vermogen $\mathcal{P}$, waar vooral Einstein's quadrupool formule in voorkomt,

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

Hierbij is c de lichtsnelheid $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s. Als het systeem bestaat uit twee puntmassa's die in het $x-y$ vlak bewegen, geldt voor Q_{ij} de volgende tabel (i, j geven de rij/kolomnummer aan)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad Q_{33} = -\sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

en $Q_{ij} = 0$ voor alle andere mogelijkheden. Hierin is (x_A, y_A) de positie van de massa A in het 'centre of mass' systeem.

- B.1** Voor de cirkelvormige banen die in A.2 beschreven staan, kunnen de componenten van Q_{ij} als functie van de tijd t beschreven worden als: 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

Bepaal k in termen van Ω en bepaal de numerieke waarden van de constanten a_i , b_i en c_{ij} .

- B.2** Bereken het vermogen $\mathcal{P}$ uitgezonden in gravitatiegolven voor dit systeem en bepaal: 1.0pt

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

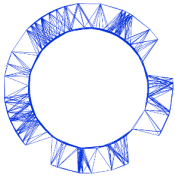
Hoe groot is ξ ?

Als je ξ niet kunt bepalen, gebruik dan $\xi = 6.4$ bij de volgende onderdelen.

- B.3** Zonder uitzending van GWs zullen de twee massa's oneindig lang in dezelfde baan blijven. Uitzending van GWs zorgt er echter voor dat het systeem energie verliest en de banen steeds kleiner worden. Laat zien dat de verandering per tijdseenheid $\frac{d\Omega}{dt}$ van de hoeksnelheid de volgende vorm krijgt: 1.0pt

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

waarbij M_c de *chirp massa* wordt genoemd. Bepaal M_c als functie van M en μ . Deze massa bepaalt de toename in frequentie tijdens het kleiner worden van de banen. (De naam "chirp" verwijst naar het hoge pitch-geluid (toename in frequentie) van kleine vogels.)



- B.4** Leid, met de hierboven gegeven informatie, de relatie af tussen de hoeksnelheid Ω en de frequentie f_{GW} van de GWs. 2.0pt
Als je weet dat voor elke vloeiende functie $F(t)$ en $a \neq 1$ geldt dat

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

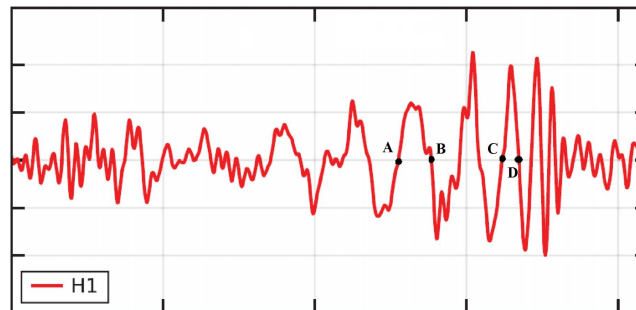
met χ een constante en t_0 een integratieconstante.

Laat dan zien dat vergelijking (10) inhoudt dat voor de GW frequentie geldt

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

en bereken de constante p .

De LIGO detectoren, bestaande uit twee in L-vorm geplaatste armen, elk met een lengte van 4 km, registreerden op 14 september 2015 de GW150914. De armen veranderden met een relatieve lengte volgens figuur 1. De armen van de detector reageerden lineair op een passerende gravitatiegolf en het hieronder aangegeven patroon geeft een beeld van de golf. Deze golf werd veroorzaakt door twee zwarte gaten in quasi-cirkelvormige banen. Het energieverlies door het uitzenden van de gravitatiegolven liet de banen kleiner worden en liet de zwarte gaten uiteindelijk botsen. Het botspunt komt ruwweg overeen met de piek van het signaal na punt D in Figuur 1.



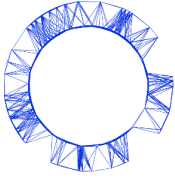
Figuur 1. Rek, oftewel de relatieve variatie van de lengte van elke arm, bij de LIGO detector H1. De horizontale as is de tijd en de punten A, B, C en D komen overeen met $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ seconden respectievelijk.

- B.5** Geef met behulp van de figuur een schatting van $f_{\text{GW}}(t)$. 1.0pt

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{en} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

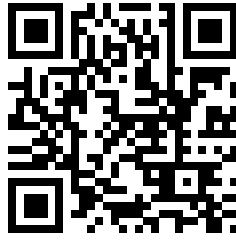
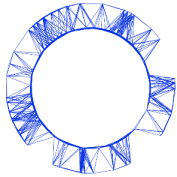
Neem aan dat vergelijking (12) klopt tot het moment van de botsing (wat strikt genomen niet waar is). Neem verder aan dat de twee objecten dezelfde massa hebben.

Maak een schatting van de chirp massa M_c en de totale massa van het systeem, druk dit uit in termen van de massa van de zon, $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$.



- B.6** Maak een schatting van de minimale baanscheiding (orbital separation) tussen de twee objecten bij $t_{\overline{CD}}$. 1.0pt
Maak vervolgens een schatting van de maximale grootte van elk object, $R_{\max}$.
Bereken $R_{\odot}/R_{\max}$ om het te vergelijken met de straal van onze zon, $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^5$ km.
Maak ook een schatting van de baansnelheid op hetzelfde moment (vlak voor de botsing), v_{col} , en vergelijk deze met de lichtsnelheid: v_{col}/c .

Concludeer dat de twee objecten relatief klein zijn en extreem snel bewegen!



LIGO-GW150914 (10 punten)

Deel A. Newtonse (conservatieve) banen (3.0 punten)

A.1 (1.0 pt)

$$n =$$

$$\alpha =$$

A.2 (1.0 pt)

$$A(\mu, \Omega, L) =$$

A.3 (1.0 pt)

$$\beta =$$

Deel B. De introductie van relativistische dissipatie (7.0 punten)

B.1 (1.0 pt)

$$k =$$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$b_1 =$$

$$b_2 =$$

$$b_3 =$$

$$c_{12} =$$

$$c_{13} =$$

$$c_{23} =$$

$$c_{21} =$$

$$c_{22} =$$

$$c_{23} =$$

$$c_{31} =$$

$$c_{32} =$$

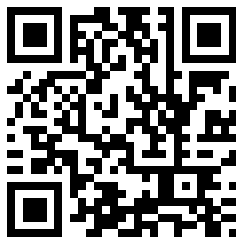
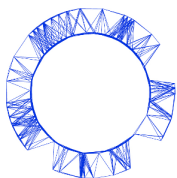
$$c_{33} =$$

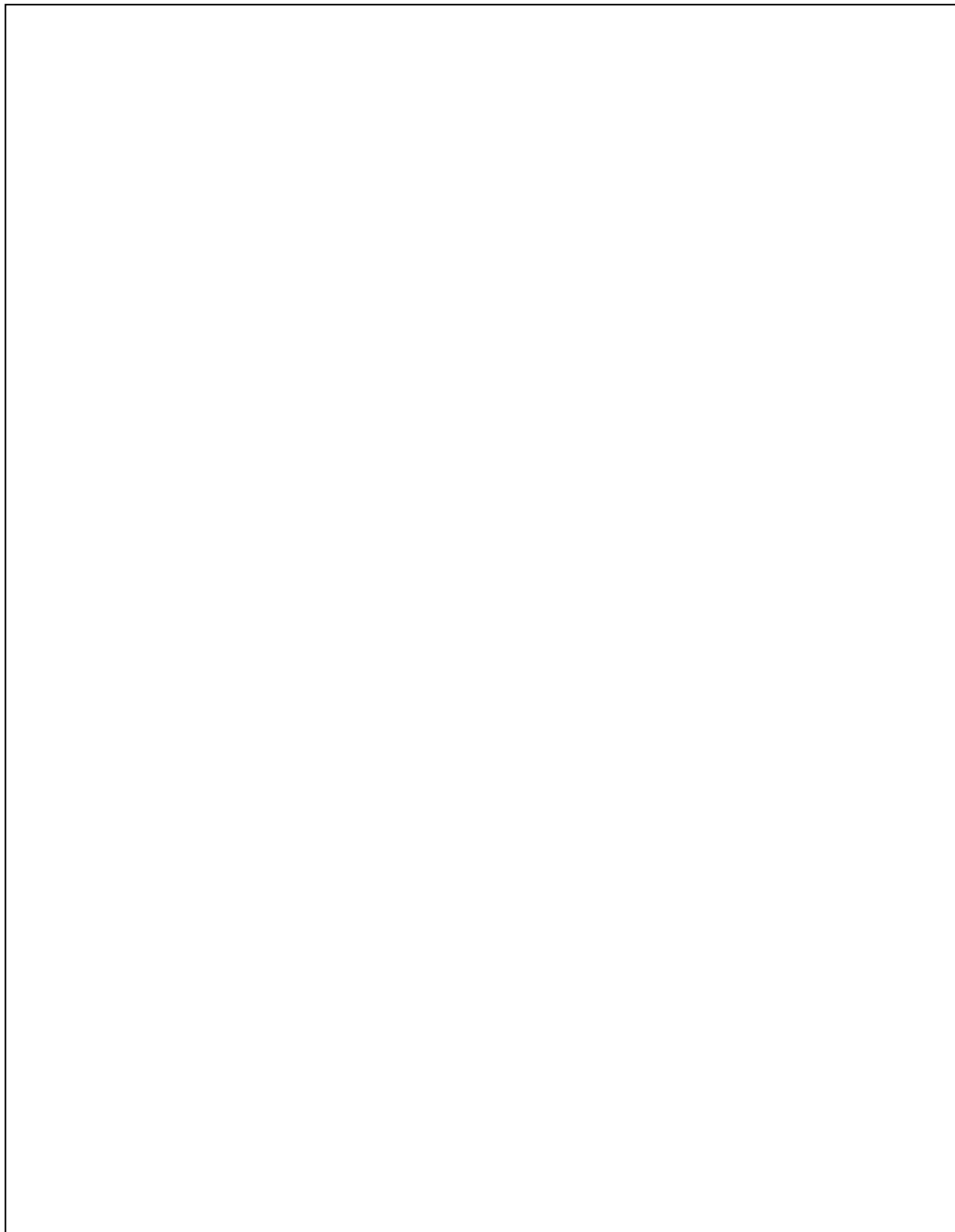
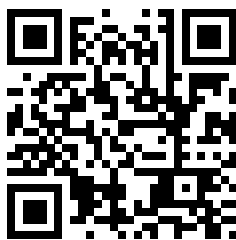
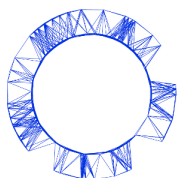
B.2 (1.0 pt)

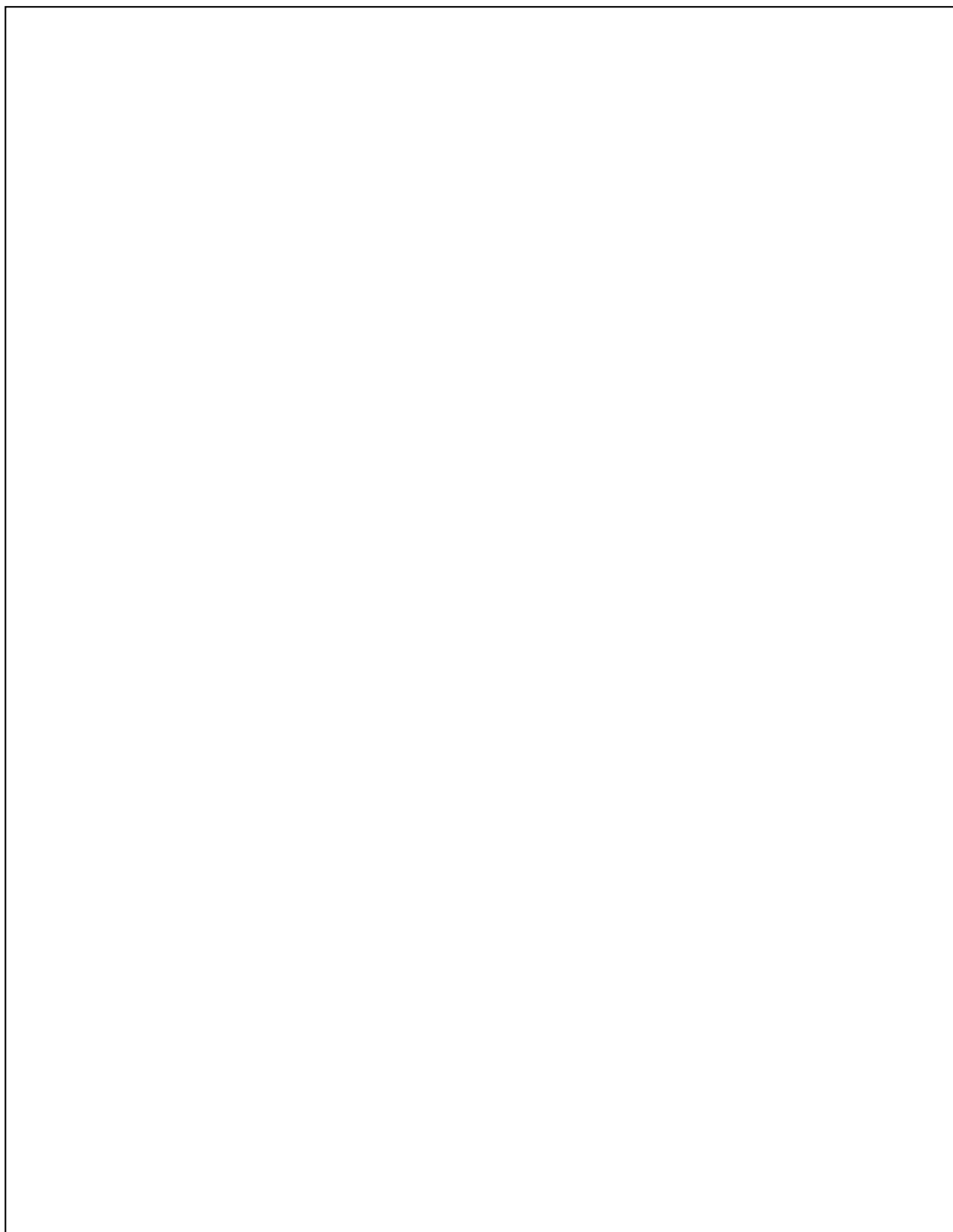
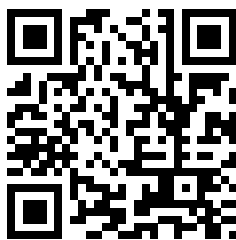
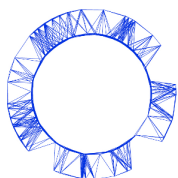
$$\xi =$$

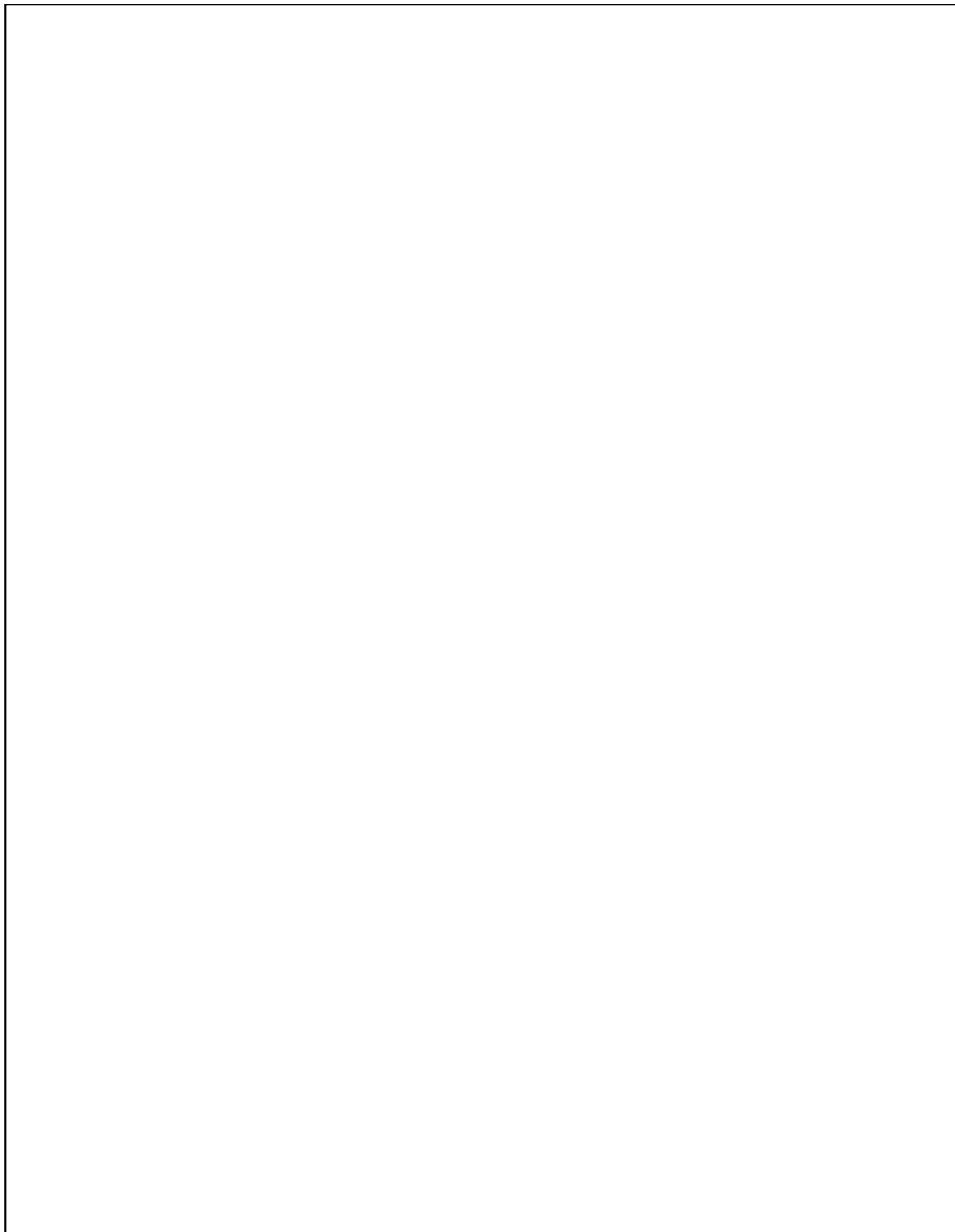
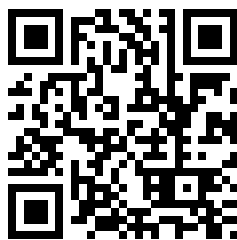
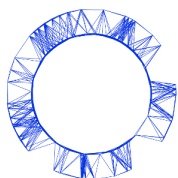
B.3 (1.0 pt)

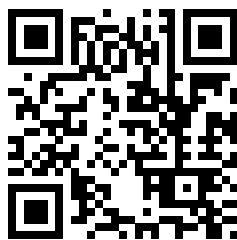
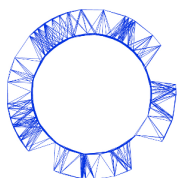
$$M_c =$$

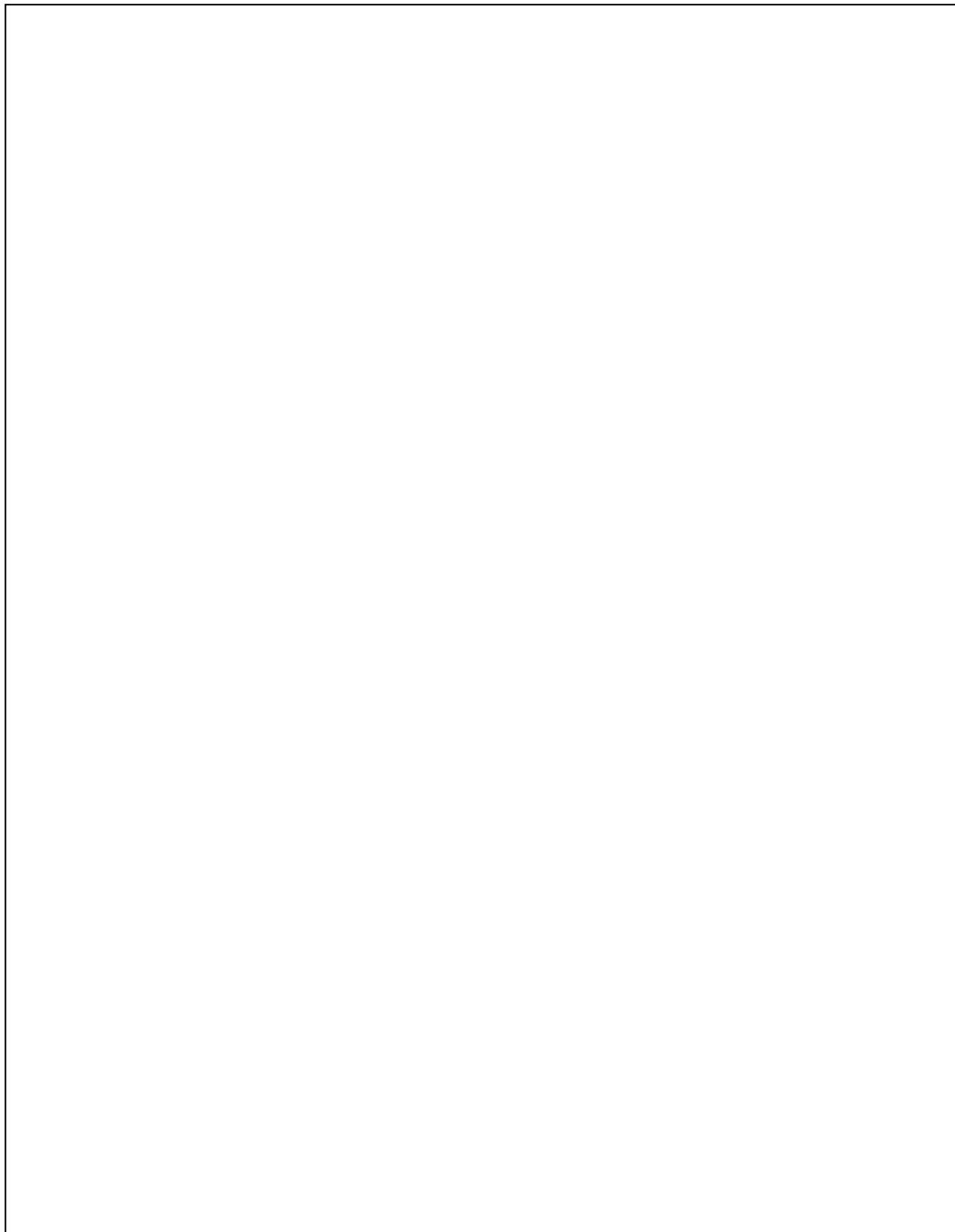
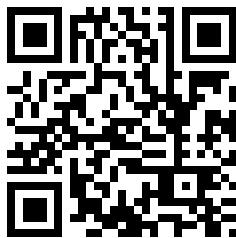
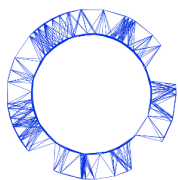
**B.4** (2.0 pt) $p =$ **B.5** (1.0 pt) $M_c \simeq$ $M \simeq$ **B.6** (1.0 pt) $L \simeq$ $\frac{R_\odot}{R_{\max}} \simeq$ $\frac{v_{\text{col}}}{c} \simeq$

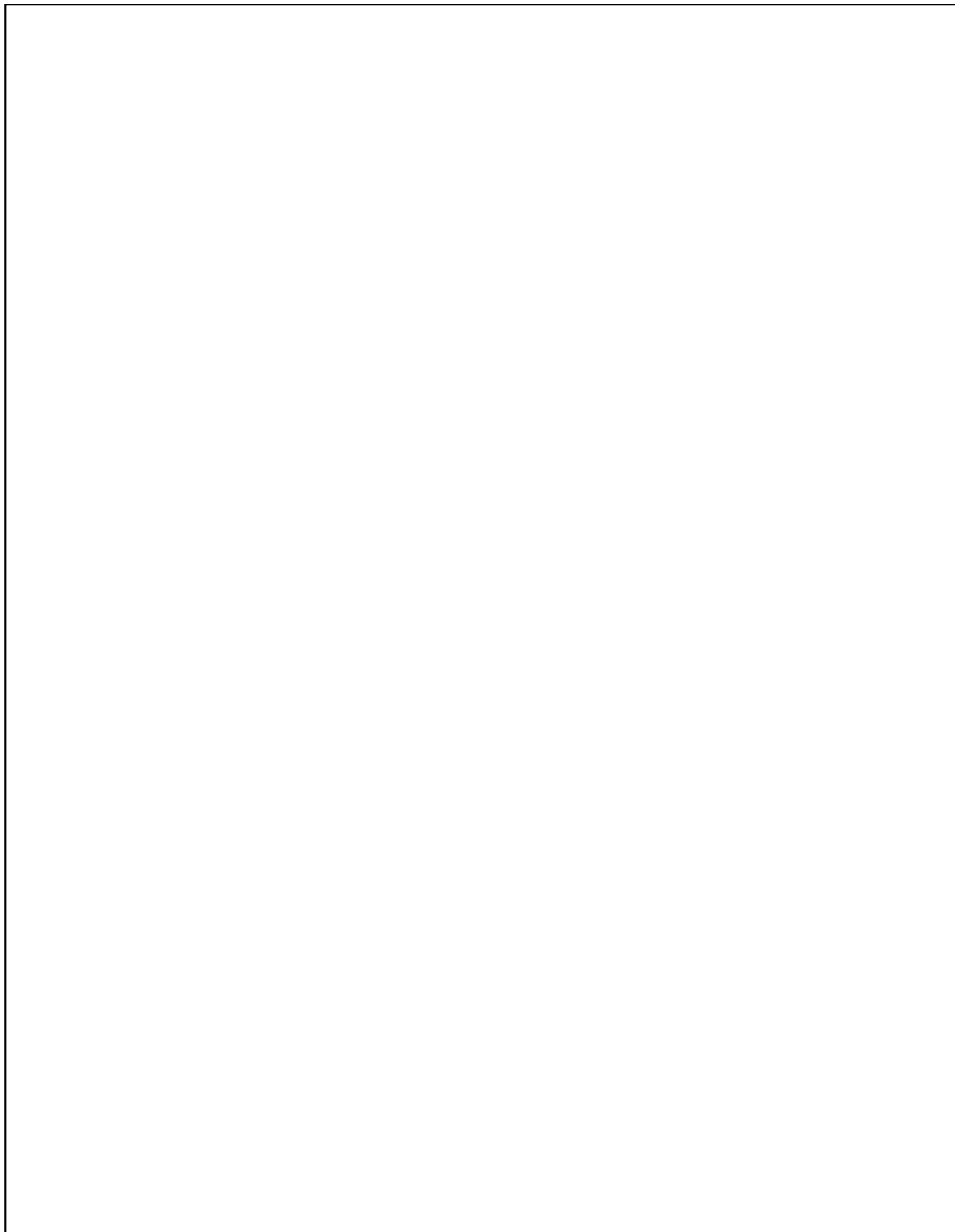
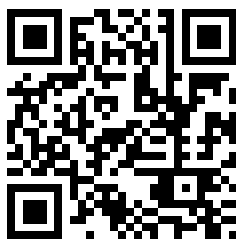
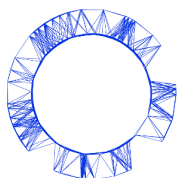


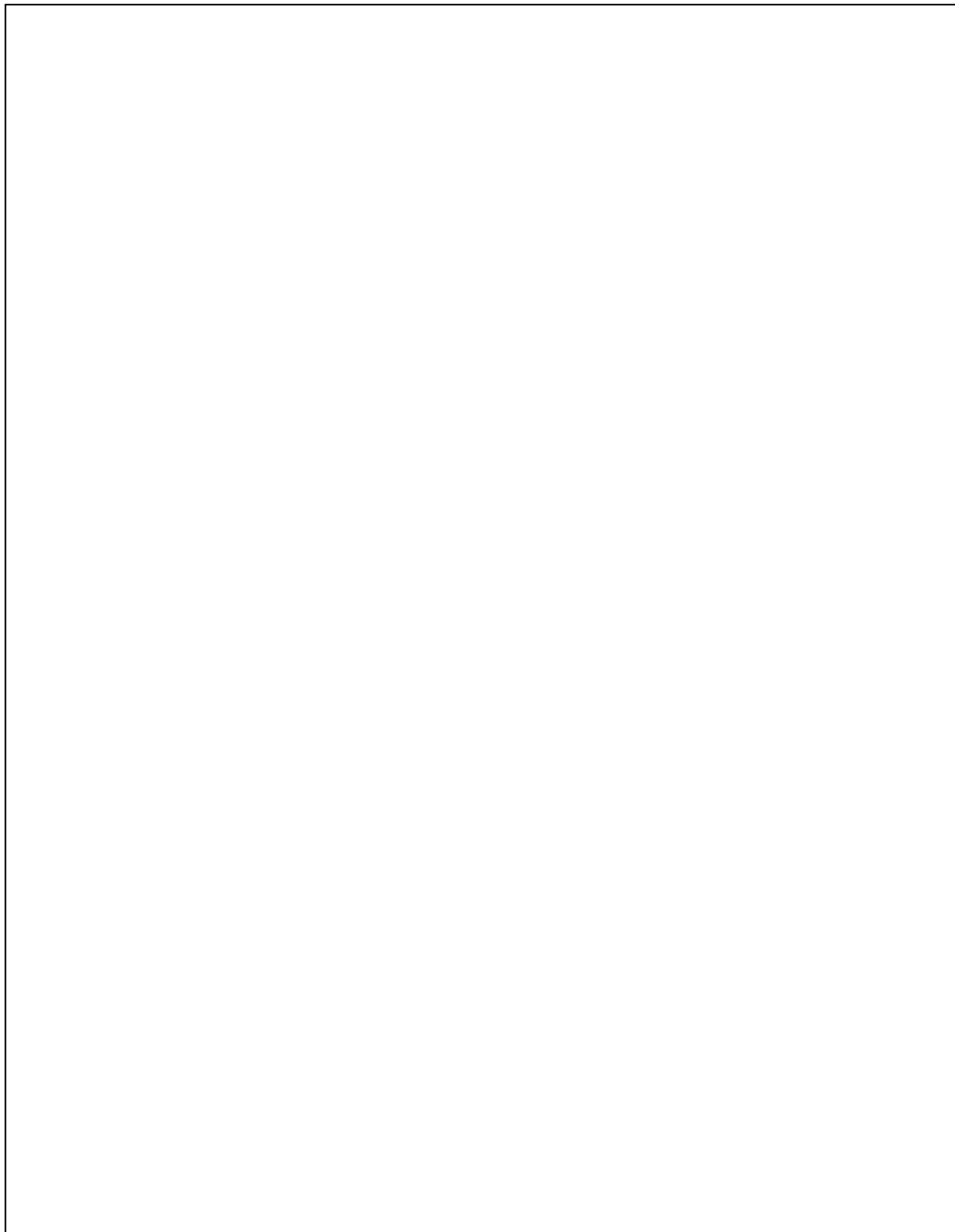
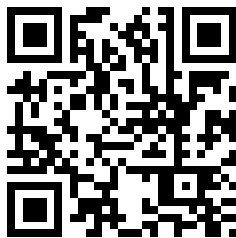
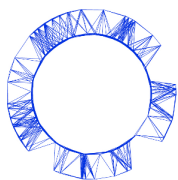


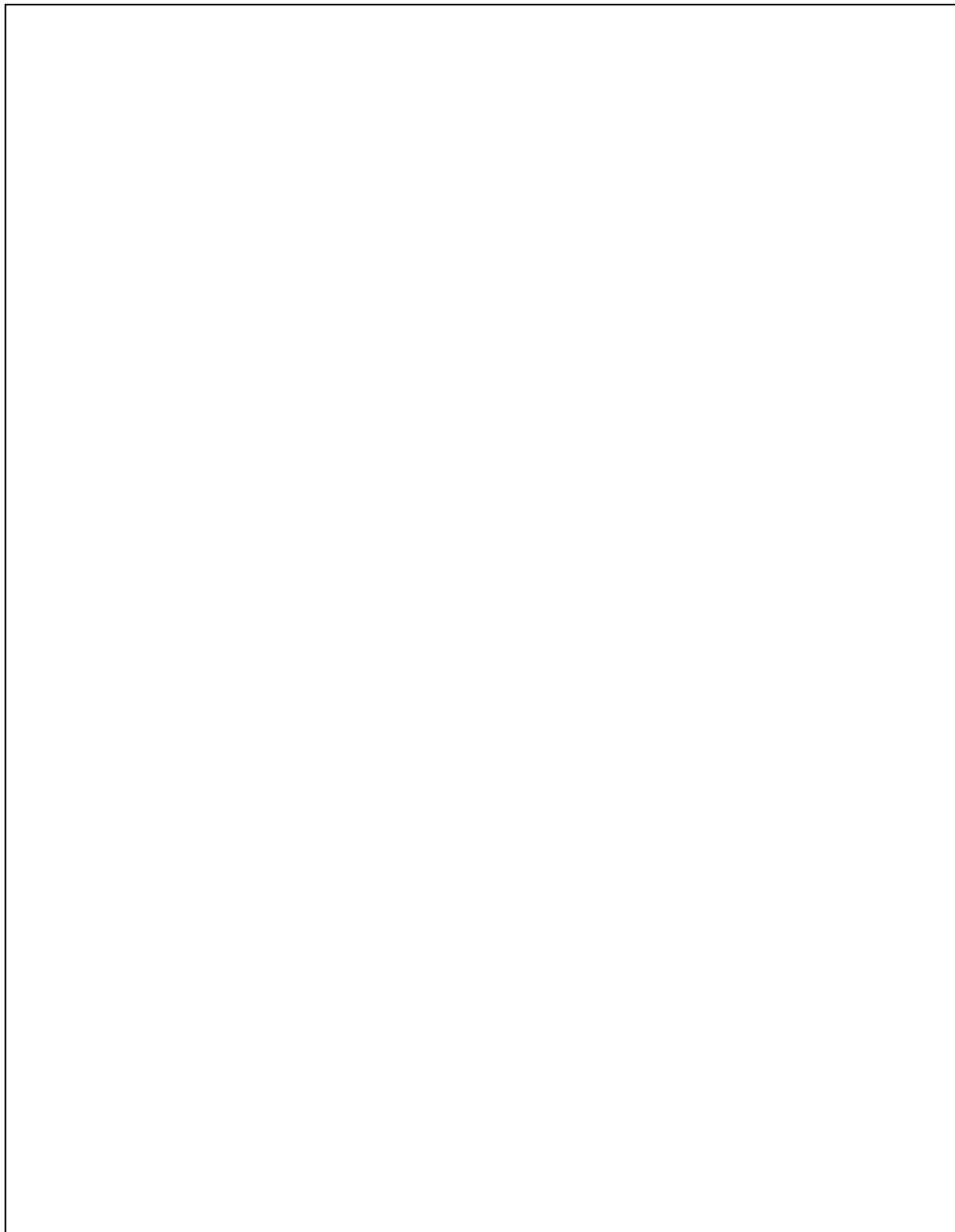
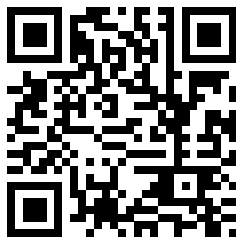
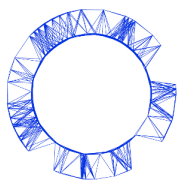


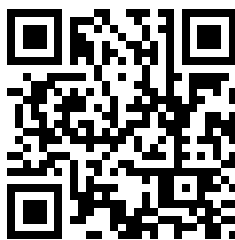
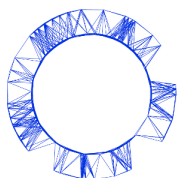


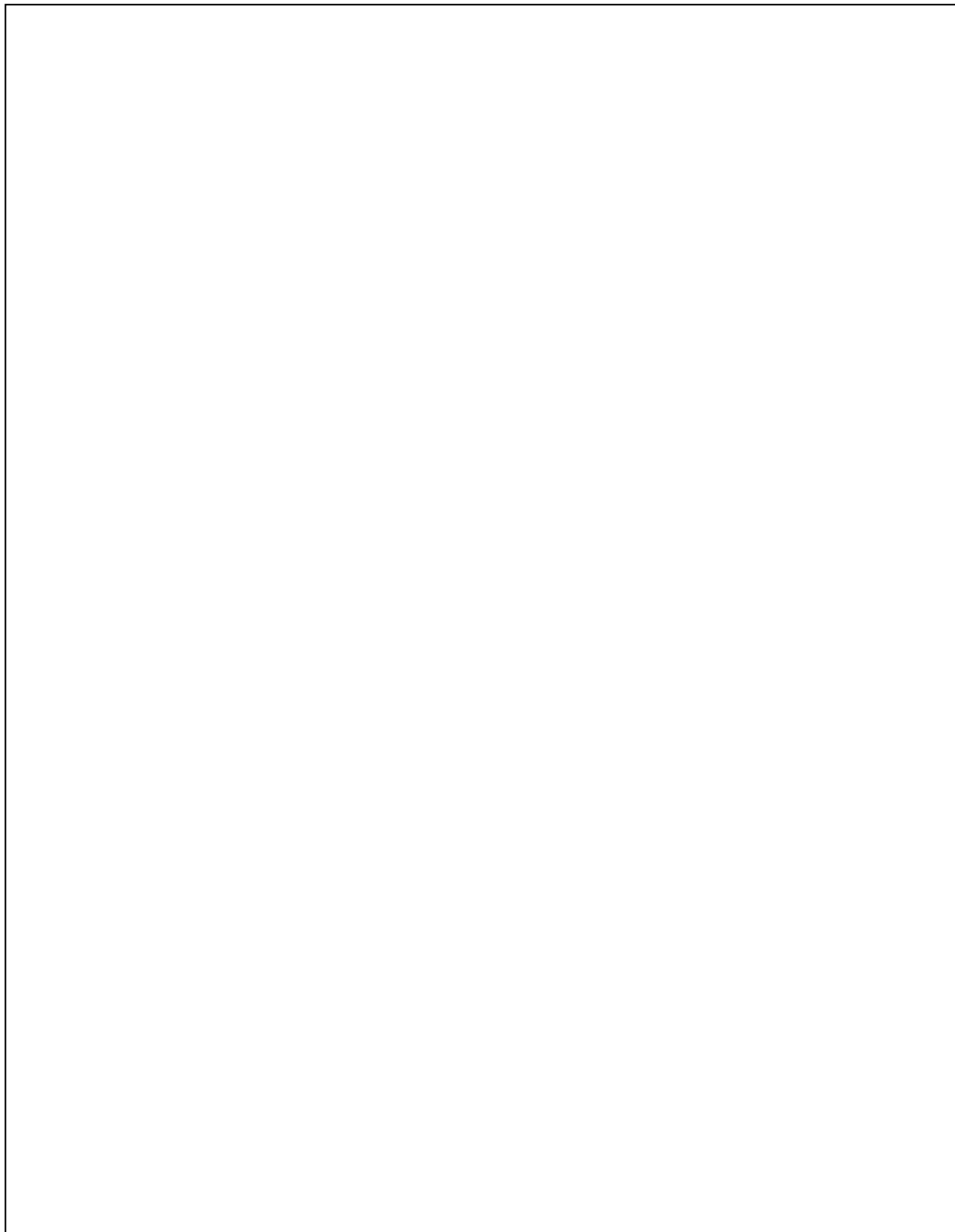
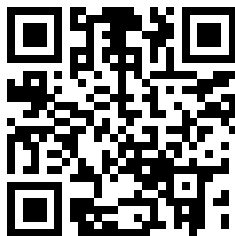
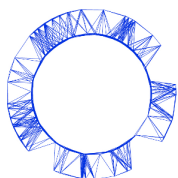


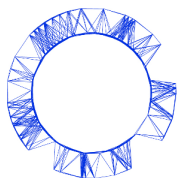












Where is the neutrino? (10 points)

When two protons collide with a very high energy at the Large Hadron Collider (LHC), several particles may be produced as a result of that collision, such as electrons, muons, neutrinos, quarks, and their respective anti-particles. Most of these particles can be detected by the particle detector surrounding the collision point. For example, quarks undergo a process called *hadronisation* in which they become a shower of subatomic particles, called "jet". In addition, the high magnetic field present in the detectors allows even very energetic charged particles to curve enough for their momentum to be determined. The ATLAS detector uses a superconducting solenoid system that produces a constant and uniform 2.00 Tesla magnetic field in the inner part of the detector, surrounding the collision point. Charged particles with momenta below a certain value will be curved so strongly that they will loop repeatedly in the field and most likely not be measured. Due to its nature, the neutrino is not detected at all, as it escapes through the detector without interacting.

Data: Electron rest mass, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg; Elementary charge, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C;

Speed of light, $c = 3.00 \times 10^8$ m s⁻¹; Vacuum permittivity, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F m⁻¹

Part A. ATLAS Detector physics (4.0 points)

- A.1** Derive an expression for the cyclotron radius, r , of the circular trajectory of an electron acted upon by a magnetic force perpendicular to its velocity, and express that radius as a function of its kinetic energy, K ; charge modulus, e ; mass, m ; and magnetic field, B . Assume that the electron is a non-relativistic classical particle. 0.5pt

Electrons produced inside the ATLAS detector must be treated relativistically. However, the formula for the cyclotron radius also holds for relativistic motion when the relativistic momentum is considered.

- A.2** Calculate the minimum value of the momentum of an electron that allows it to escape the inner part of the detector in the radial direction. The inner part of the detector has a cylindrical shape with a radius of 1.1 meters, and the electron is produced in the collision point exactly in the center of the cylinder. Express your answer in MeV/ c . 0.5pt

When accelerated perpendicularly to the velocity, relativistic particles of charge e and rest mass m emit electromagnetic radiation, called synchrotron radiation. The emitted power is given by

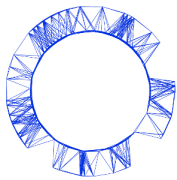
$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

where a is the acceleration and $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$.

- A.3** A particle is called ultrarelativistic when its speed is very close to the speed of light. For an ultrarelativistic particle the emitted power can be expressed as: 1.0pt

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

where ξ is a real number, n, k are integers, E is the energy of the charged particle and B is the magnetic field. Find ξ , n and k .



- A.4** In the ultrarelativistic limit, the energy of the electron as a function of time is: 1.0pt

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

where E_0 is the initial energy of the electron. Find α as a function of e , c , B , ϵ_0 and m .

- A.5** Consider an electron produced at the collision point along the radial direction with an energy of 100 GeV. Estimate the amount of energy that is lost due to synchrotron radiation until the electron escapes the inner part of the detector? Express your answer in MeV. 0.5pt

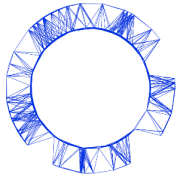
- A.6** Find an expression for the cyclotron frequency of the electron as a function of time in the ultrarelativistic limit. 0.5pt

Part B. Finding the neutrino (6.0 points)

The collision between the two protons shown in Figure 1 leads to the production of a top quark (t) and an anti-top quark ($\bar{t}$), the heaviest elementary particles ever detected. The top quark decays into a W^+ boson and a bottom quark (b), while the anti-top quark decays into a W^- boson and an anti-bottom quark ($\bar{b}$). In the case depicted in Figure 1, the W^+ boson decays into a anti-muon (μ^+) and a neutrino (ν), and the W^- boson decays into a quark and an anti-quark. The task of this problem is to reconstruct the full momentum of the neutrino using the momenta of some detected particles. **For simplicity, all particles and jets in this problem will be considered massless, except for the top quark and $W^\pm$ bosons.**

The momenta of the top quark decay products can be determined from the experiment (see Table), except for the neutrino momentum component along the (z -axis). The total linear momentum of the final state particles caught by the detector is only zero on the transverse plane (xy plane), and not along the collision line (z -axis). As such, one can find the transverse momentum of the neutrino from the missing momentum in the transverse plane.

On June 4, 2015, the ATLAS experiment at the LHC recorded a proton-proton collision at 00:21:24 GMT+1 like the one represented in Figure 1.



from the experiment), has two components: the so-called "signal" (corresponding to the decay of top quarks) and "background" (corresponding to events from other processes that do not include top quarks). Experimental data include both processes, see Fig. 2.

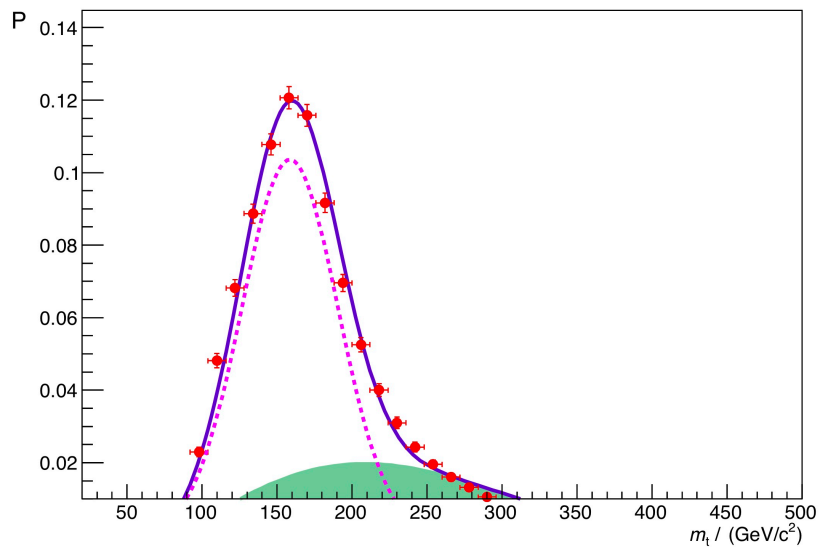
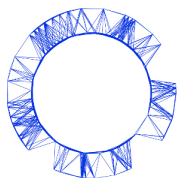


Figure 2. Top quark mass distribution as determined from the experiment, i.e. the normalised number of events plotted against the top quark mass. The dots correspond to the data. The dashed line corresponds to the "signal" and the shade to the "background".

B.4 According to the top quark mass distribution, which one of the two previous solutions is more likely to be the right one? Estimate the probability for the most likely solution. 1.0pt

B.5 Calculate the distance traveled by the top quark before decaying, using the most likely solution. Assume the top quark has a mean lifetime at rest of 5×10^{-25} s. 1.0pt



Waar is het neutrino? (10 punten)

Als twee protonen met heel veel energie botsen in de Large Hadron Collider (LHC), kunnen verschillende deeltjes geproduceerd worden als gevolg van die botsing, zoals elektronen, muonen, neutrino's, quarks, en hun respectieve antideeltjes. De meeste deeltjes kunnen gedetecteerd worden door de deeltjesdetector rond de plaats van de botsing. De quarks ondergaan bijvoorbeeld een proces *hadronisatie* waarbij ze een bundel van subatomaire deeltjes worden, "jet" genoemd. Bovendien kan het sterke magneetveld in de detectoren zelfs hoog energetische geladen deeltjes voldoende afbuigen om hun impuls te kunnen bepalen. De ATLAS detector gebruikt een systeem van supergeleidende spoelen dat een constant en homogeen magnetisch veld van 2.00 Tesla opwekt binnen in de detector, rond de plaats van de botsing. Geladen deeltjes met een impuls kleiner dan een bepaalde waarde zullen zo sterk afgebogen worden dat ze herhaaldelijk in het veld rondgaan en waarschijnlijk niet gemeten worden. Door zijn aard wordt de neutrino helemaal niet gedetecteerd omdat hij ontsnapt zonder interactie met de detector.

Gegevens: rustmassa van een elektron, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg; Elementaire lading, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C;

Lichtsnelheid, $c = 3 \times 10^8$ m s⁻¹; permitiviteit van vacuüm, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F m⁻¹

Deel A. Fysica van de ATLAS Detector (4.0 punten)

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.1 | Leid een uitdrukking af voor de cyclotronstraal r van de cirkelbaan die een elektron uitvoert onder invloed van een magnetische kracht loodrecht op zijn snelheid, en druk die straal uit als functie van zijn kinetische energie K , de elementaire lading e , zijn massa m , en het magnetisch veld B . Neem aan dat het elektron een niet-relativistisch klassiek deeltje is. | 0.5pt |
|------------|--|-------|

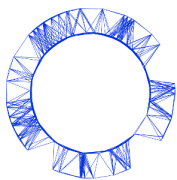
Elektronen die in de ATLAS detector geproduceerd worden, moeten behandeld worden op een relativistische manier. De formule voor de cyclotronstraal blijft echter ook geldig voor relativistische bewegingen als de relativistische impuls in rekening gebracht wordt.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.2 | Bereken de minimale waarde van de impuls van een elektron om te kunnen ontsnappen uit de detector in de radiale richting. Het inwendige van de detector heeft een cilindrische vorm met een straal van 1.1 meter, en het elektron is geproduceerd op de plaats van de botsing exact in het centrum van de cilinder. Druk je antwoord uit in MeV/ c . | 0.5pt |
|------------|--|-------|

Als relativistische deeltjes met lading e en rustmassa m versneld worden in een richting loodrecht op de snelheid, zenden zij elektromagnetische straling uit. Dit wordt synchrotronstraling genoemd. Het uitgezonden vermogen wordt gegeven door

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

waarin a de versnelling is en $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$.



- A.3** Een deeltje wordt ultrarelativistisch genoemd als zijn snelheid erg dicht bij de lichtsnelheid is. Voor een ultrarelativistisch deeltje kan het uitgezonden vermogen uitgedrukt worden als volgt: 1.0pt

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

waarin ξ een reëel getal is, n, k gehele getallen zijn, E de energie van het geladen deeltje en B de magnetische veldsterkte. Bepaal ξ , n en k .

- A.4** In de ultrarelativistische limiet, is de energie van het elektron als functie van de tijd: 1.0pt

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

waarin E_0 de beginenergie van het elektron is. Bepaal α als functie van e , c , B , ϵ_0 en m .

- A.5** Beschouw een elektron geproduceerd op de plaats van de botsing in de radiale richting met een energie van 100 GeV. Maak een schatting van de energie die verloren gaat door de synchrotronstraling tot het elektron ontsnapt uit het inwendige van de detector. Druk je antwoord uit in MeV. 0.5pt

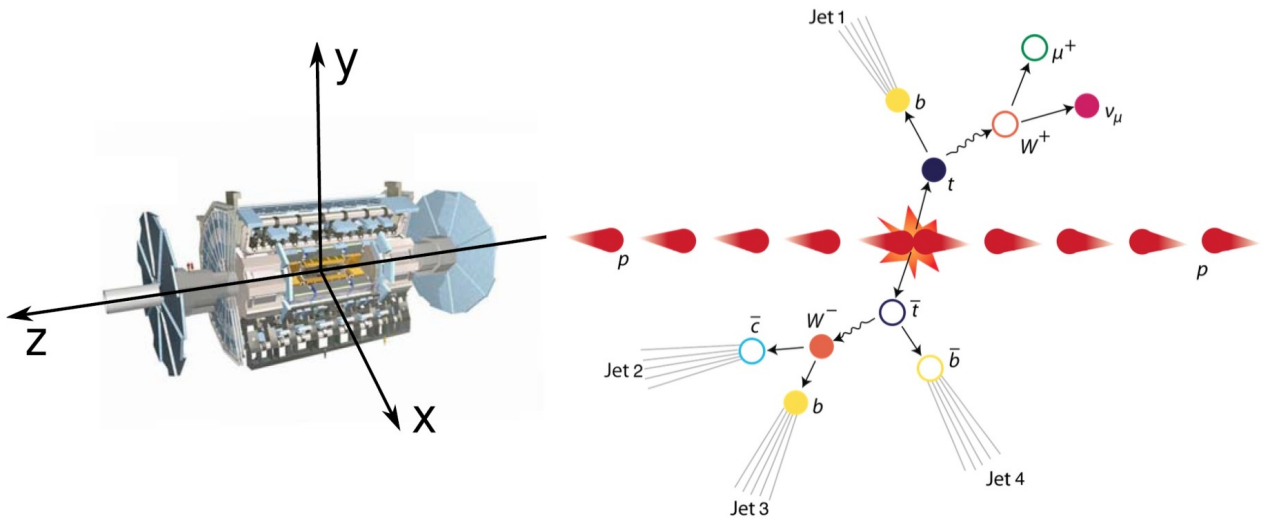
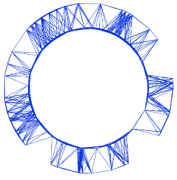
- A.6** Bepaal een uitdrukking voor de cyclotronfrequentie van het elektron als functie van de tijd in de ultrarelativistische limiet. 0.5pt

Deel B. Het neutrino vinden (6.0 punten)

De botsing tussen de twee protonen voorgesteld in Figuur 1 leidt tot de productie van een topquark (t) en een anti-top quark ($\bar{t}$), de zwaarste elementaire deeltjes ontdekt ooit. De top quark vervalst tot een W^+ boson en een bottom quark (b), terwijl de anti-top quark vervalst tot een W^- boson en een anti-bottom quark ($\bar{b}$). In het geval voorgesteld in Figuur 1, vervalst het W^+ boson tot een anti-muon (μ^+) en een neutrino (ν), en het W^- boson tot een quark en een anti-quark. De opdracht bij dit probleem is de gehele impuls van de neutrino te reconstruëren aan de hand van de impuls van sommige gedetecteerde deeltjes. **Voor de eenvoud, zullen alle deeltjes en jets in dit probleem beschouwd worden als massaloos, uitgezonderd de top quark en $W^\pm$ bosonen.**

De impuls van de vervalproducten van de top quark kan bepaald worden door het experiment (zie tabel), behalve de component van de impuls van het neutrino in de richting van de z -as. De totale impuls van de deeltjes in de eindtoestand, waargenomen door de detector, is alleen nul in het xy -vlak (transversale vlak), en niet langs de lijn van de botsing (de z -as). Zo kan men de transversale impuls van de neutrino afleiden uit de ontbrekende impuls in het xy -vlak.

Op 4 juni 2015, nam het ATLAS experiment aan de LHC een proton-proton botsing zoals voorgesteld in Figuur 1 waar om 00:21:24 GMT+1.



Figuur 1. Schematische voorstelling van het assenstelsel van de ATLAS detector (links) en proton-proton botsing (rechts).

De impulswaarden van de drie deeltjes in de eindtoestand voortkomend uit het verval van de top quark, inclusief neutrino, worden hieronder gegeven voor elke component.

Deeltje	p_x (GeV/c)	p_y (GeV/c)	p_z (GeV/c)
anti-muon (μ^+)	-24.7	-24.9	-12.4
jet 1 (j_1)	-14.2	+50.1	+94.1
neutrino (ν)	-104.1	+5.3	—

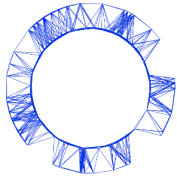
- B.1** Leid een vergelijking af voor het verband tussen het kwadraat van de massa van een W^+ boson, m_W^2 , en de componenten van de impuls van de neutrino en anti-muon uit de tabel hierboven. Druk je antwoord uit in functie van de transversale impuls van neutrino en anti-muon,

$$\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j} \text{ and } \vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j},$$
en de z -componenten van hun impuls, $p_z^{(\mu)}$ en $p_z^{(\nu)}$. 1.5pt

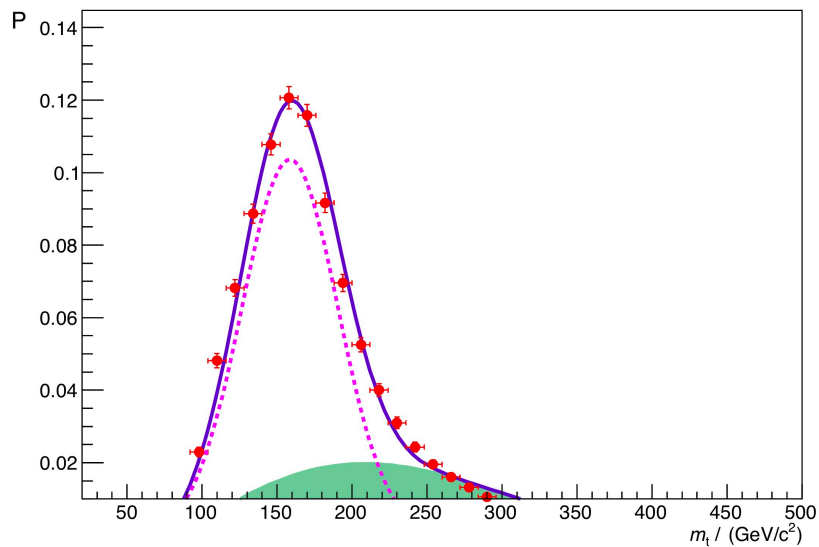
- B.2** Neem aan dat de W^+ bosonmassa $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$ is. Bereken de twee mogelijke oplossingen voor de z -component van de impuls van de neutrino, $p_z^{(\nu)}$. Druk je antwoord uit in GeV/c . 1.5pt

- B.3** Bereken de massa van de top quark voor elk van de voorgaande oplossingen. Druk je antwoord uit in GeV/c^2 .
[Indien je de twee oplossingen in B.2 niet gevonden hebt, gebruik dan
 $p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c$ en $p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c$.] 1.0pt

Het genormaliseerde aantal botsingen voor de meting van de massa van de top quark (zoals bepaald



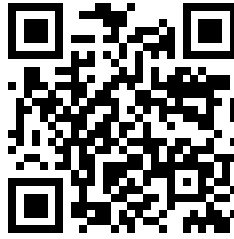
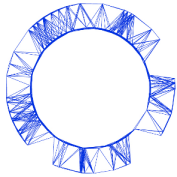
uit het experiment) heeft twee componenten: de zogenoemde "signaal" (overeenkomend met het verval van top quarks) en "achtergrond" (overeenkomend met gebeurtenissen uit andere processen zonder top quarks). Meetresultaten komen van beide processen. zie Figuur 2.



Figuur 2. Massaverdeling van de top quark zoals bepaald uit het experiment, dit is het genormaliseerde aantal gebeurtenissen, uitgezet als functie van de massa van een top quark. De punten corresponderen met de meetpunten. De stippellijn correspondeert met het "signaal" en het grijze gebied met de "achtergrond".

B.4 Welke van de twee oplossingen van B.3 is waarschijnlijk de juiste volgens de massaverdeling van de top quark? Maak daartoe een schatting van de waarschijnlijkheid voor de meest juiste oplossing. 1.0pt

B.5 Bereken de afstand afgelegd door de top quark vóór zijn verval, gebruik makend van de meest juiste oplossing. Neem aan dat de top quark in rust gemiddeld 5×10^{-25} s blijft bestaan. 1.0pt

**Waar is het neutrino? (10 punten)****Deel A. Fysica van de ATLAS detector (4.0 punten)****A.1** (0.5 pt)

$r =$

A.2 (0.5 pt)

$p =$

A.3 (1.0 pt)

$\xi = \quad n = \quad k =$

A.4 (1.0 pt)

$\alpha =$

A.5 (0.5 pt)

$\Delta E =$

A.6 (0.5 pt)

$\omega(t) =$

Deel B. Het neutrino vinden (6.0 punten)**B.1** (1.5 pt)

$m_W^2 =$

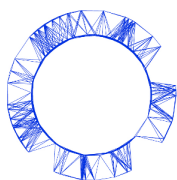
B.2 (1.5 pt)

$p_z^\nu = \quad \text{of} \quad p_z^\nu =$

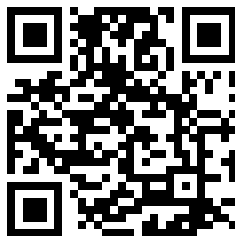
B.3 (1.0 pt)

$m_t = \quad \text{of} \quad m_t =$

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal



NLD-S-2 T-2 A-2

A2-2

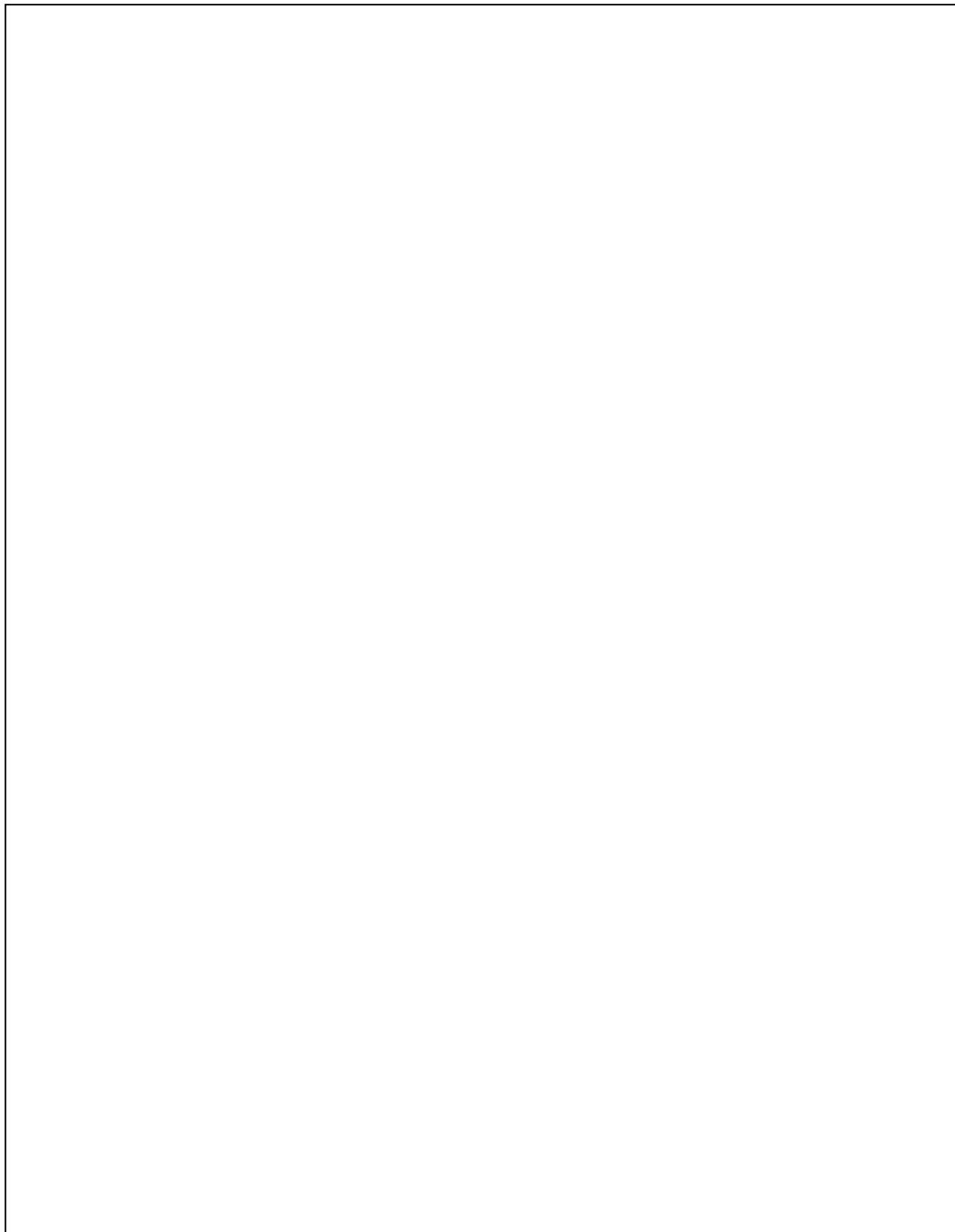
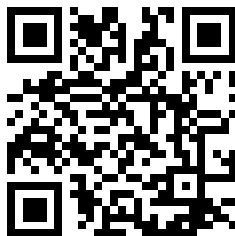
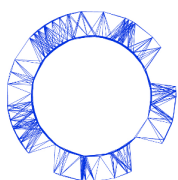
NLD (Netherlands)

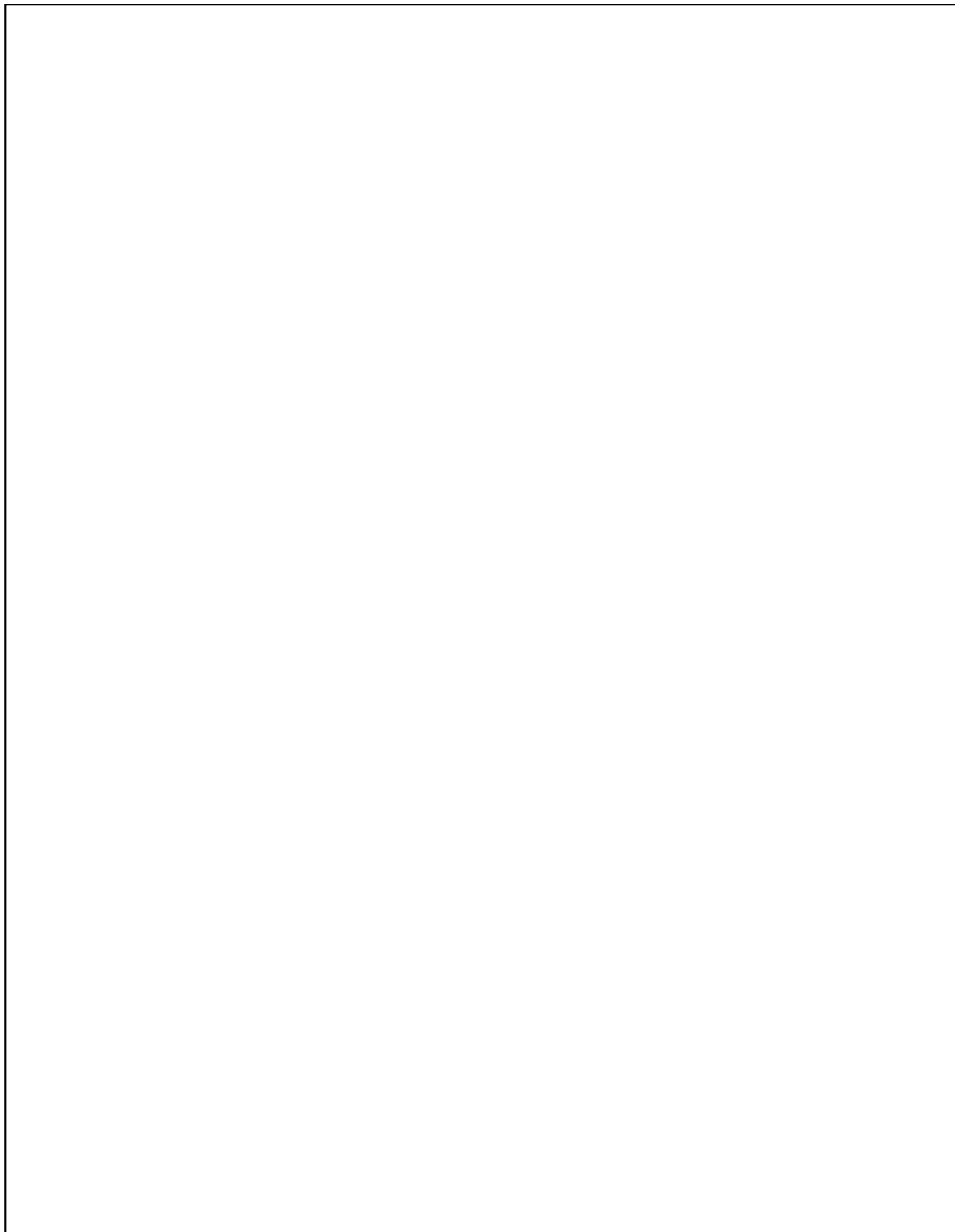
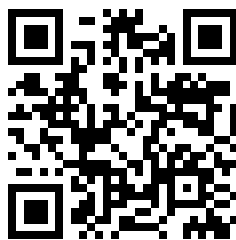
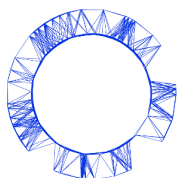
B.4 (1.0 pt)

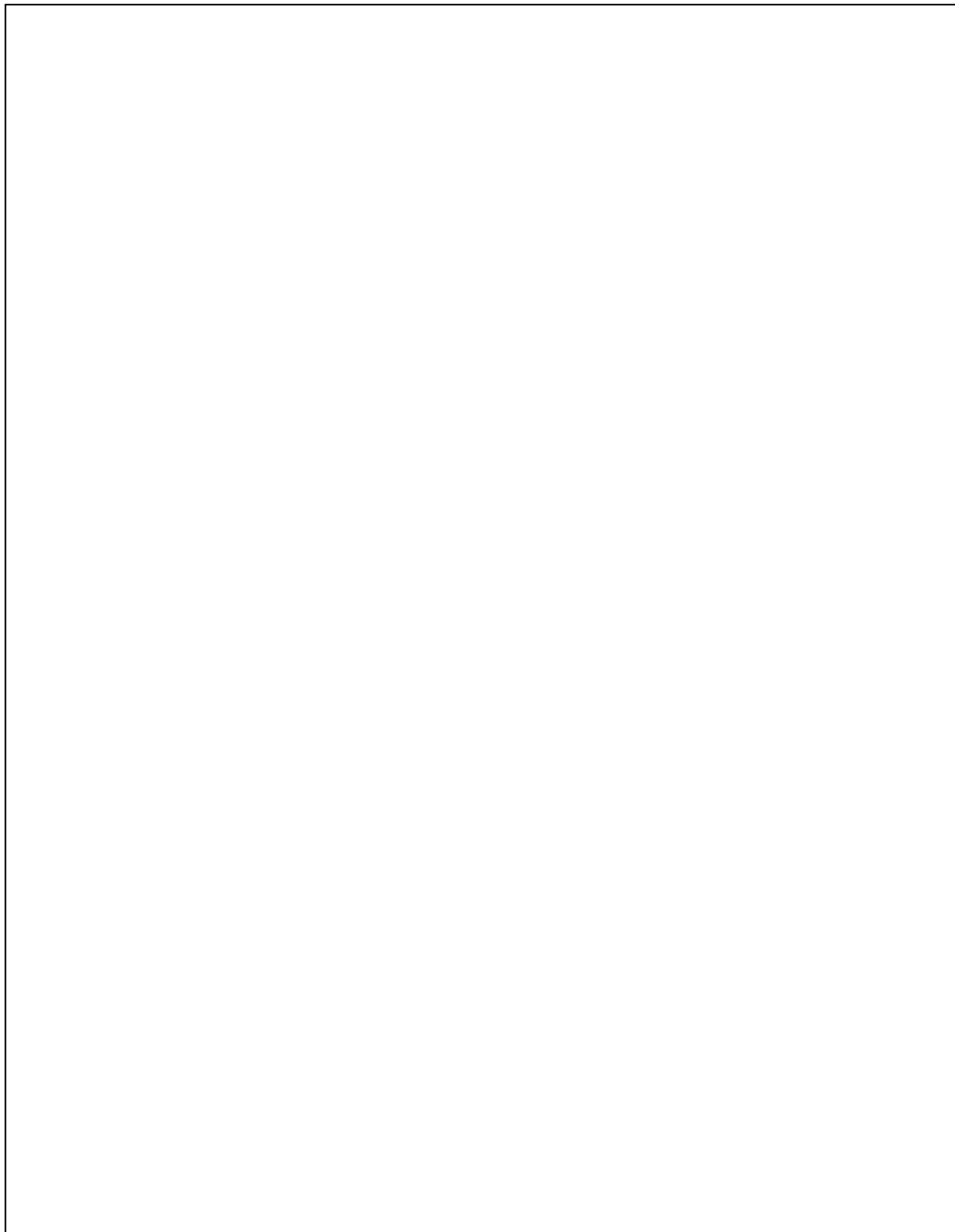
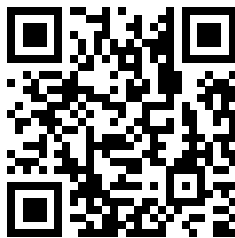
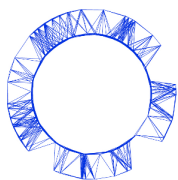
Meest waarschijnlijke oplossing:

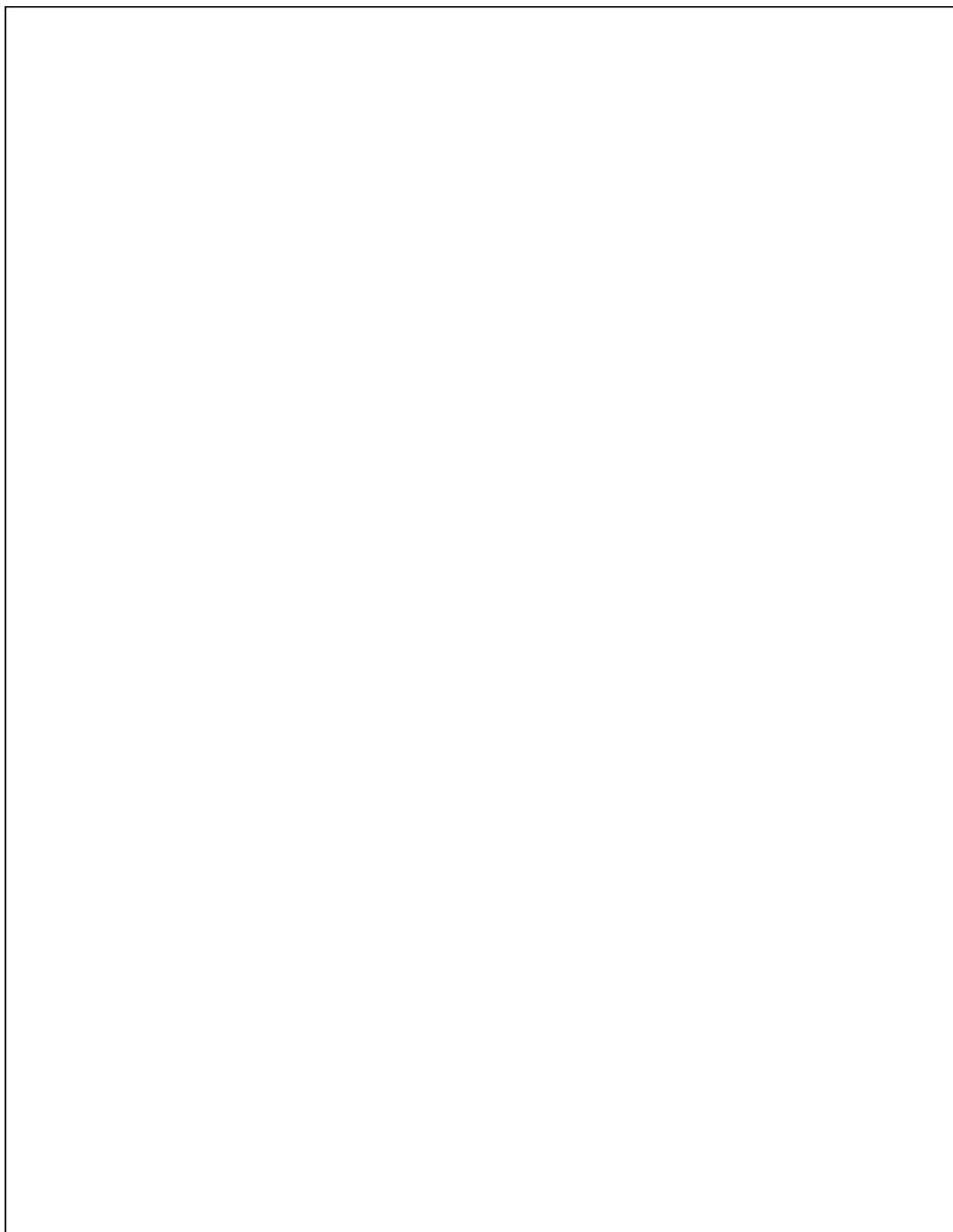
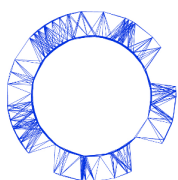
B.5 (1.0 pt)

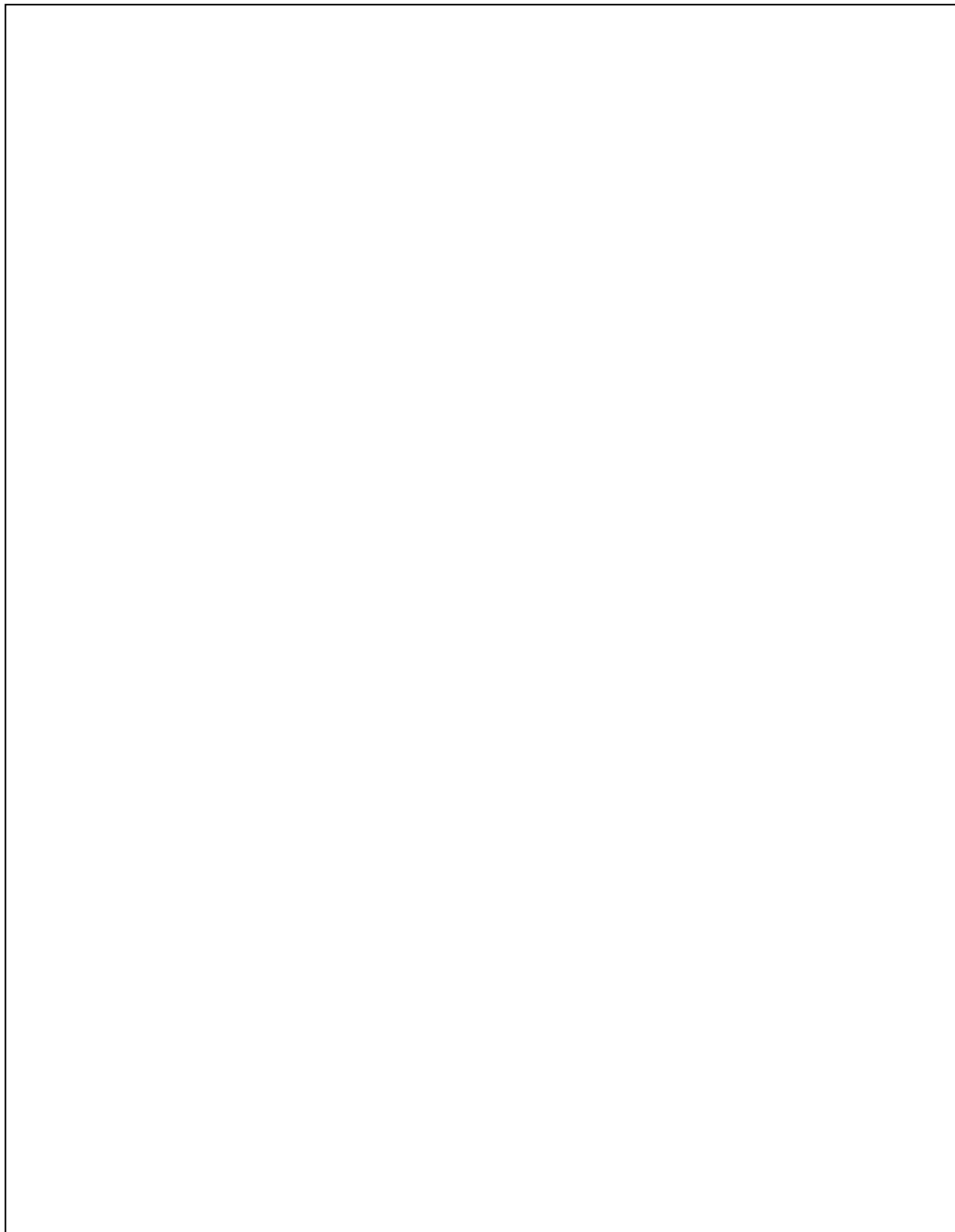
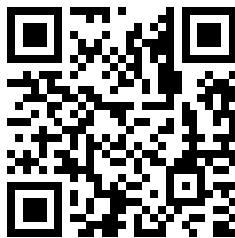
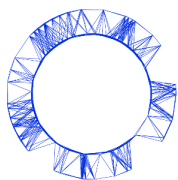
$d =$

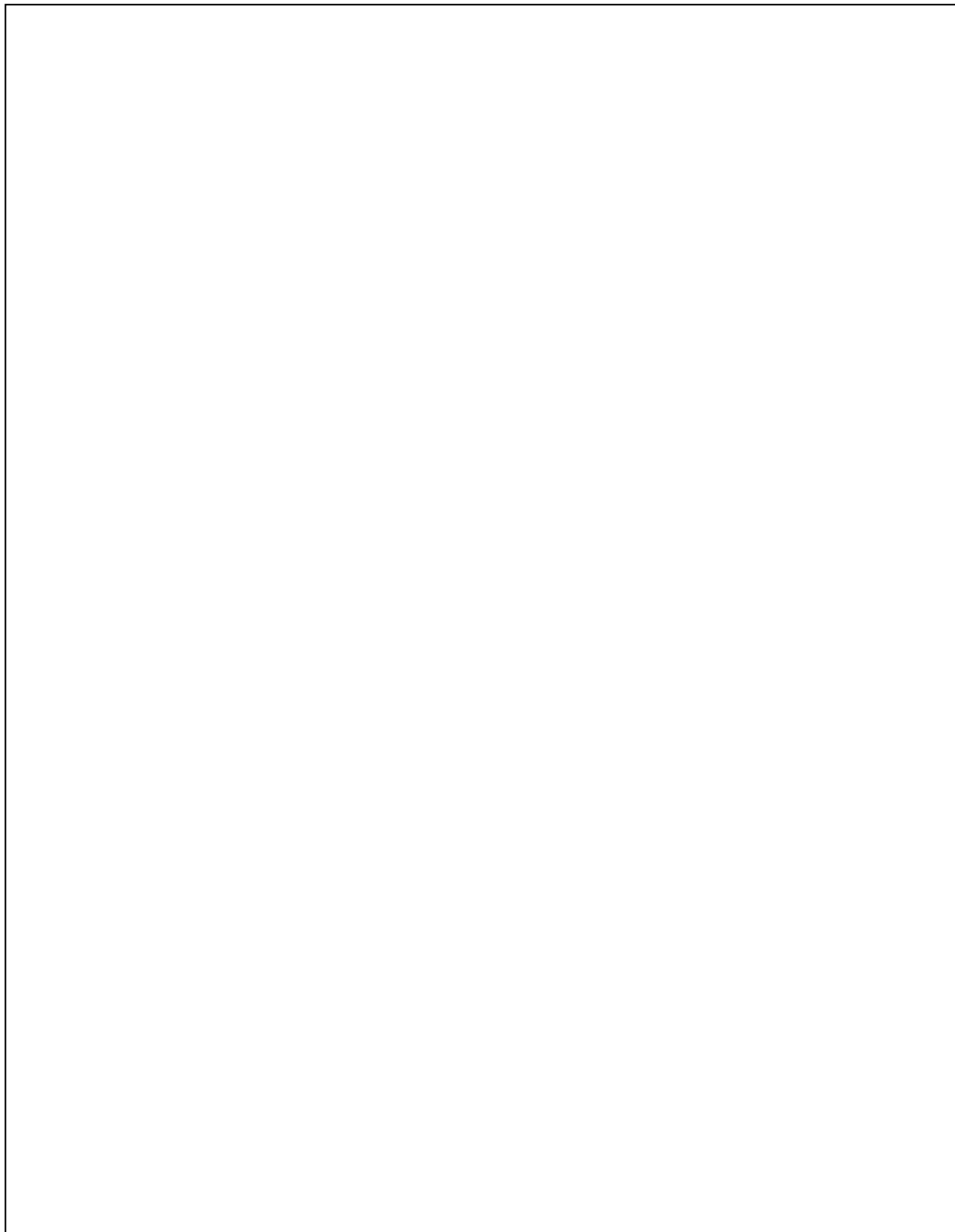
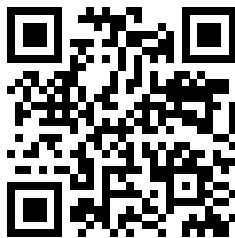
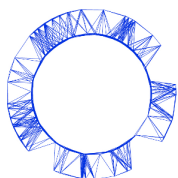


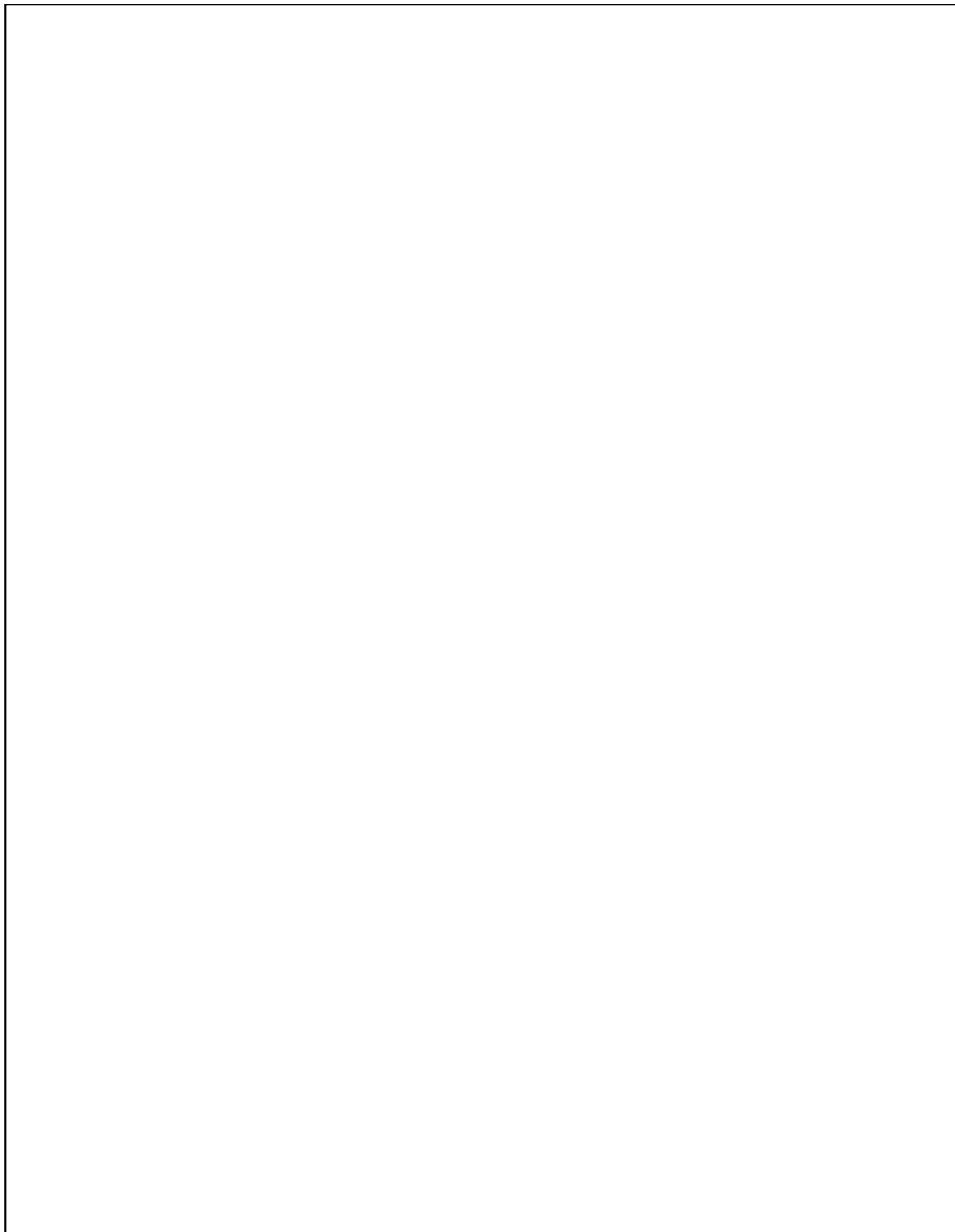
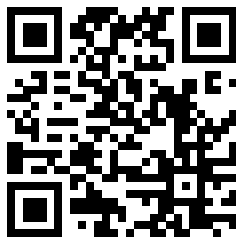
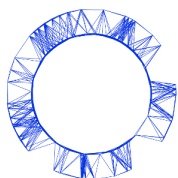


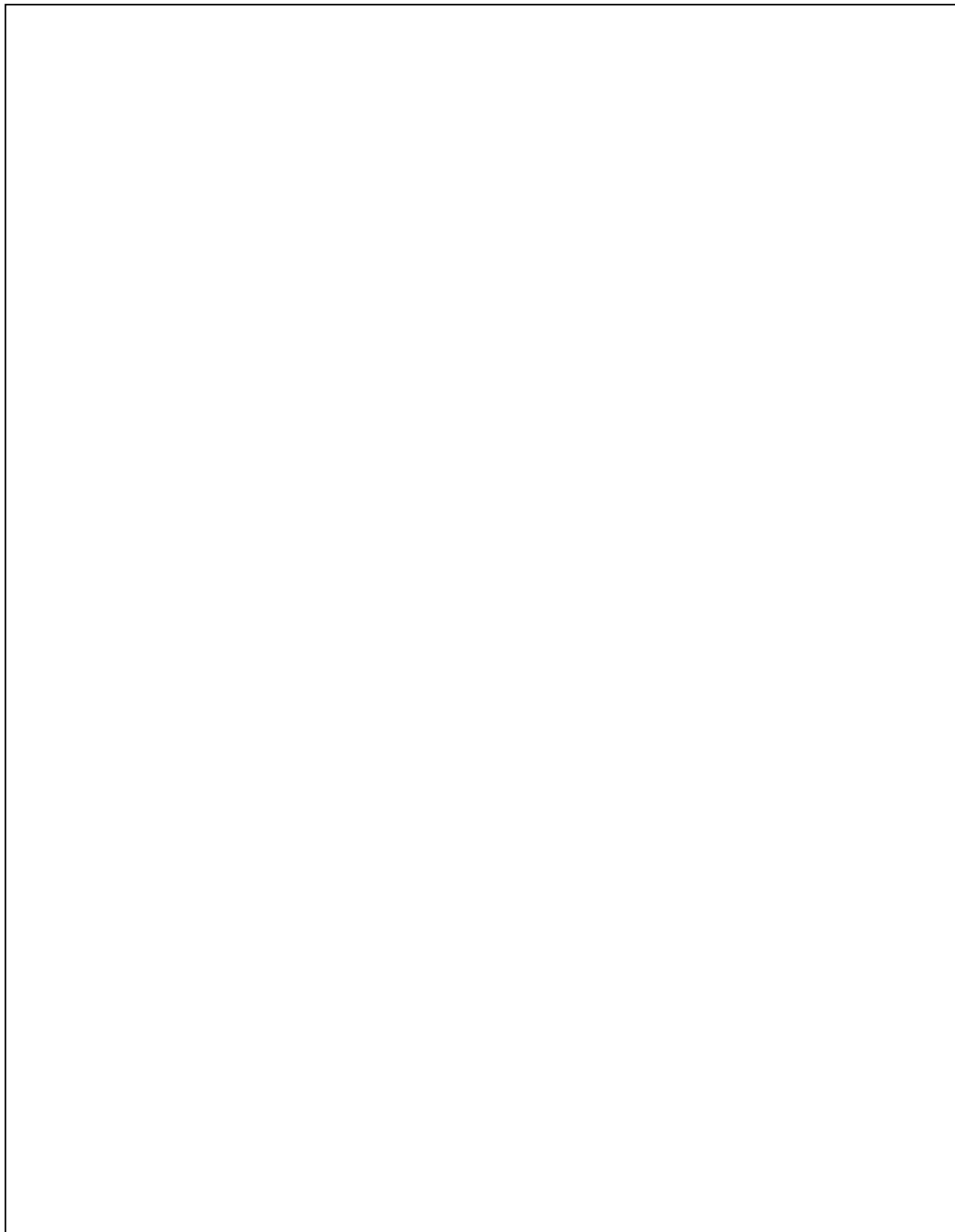
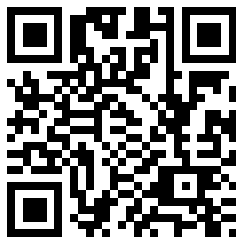
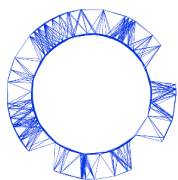


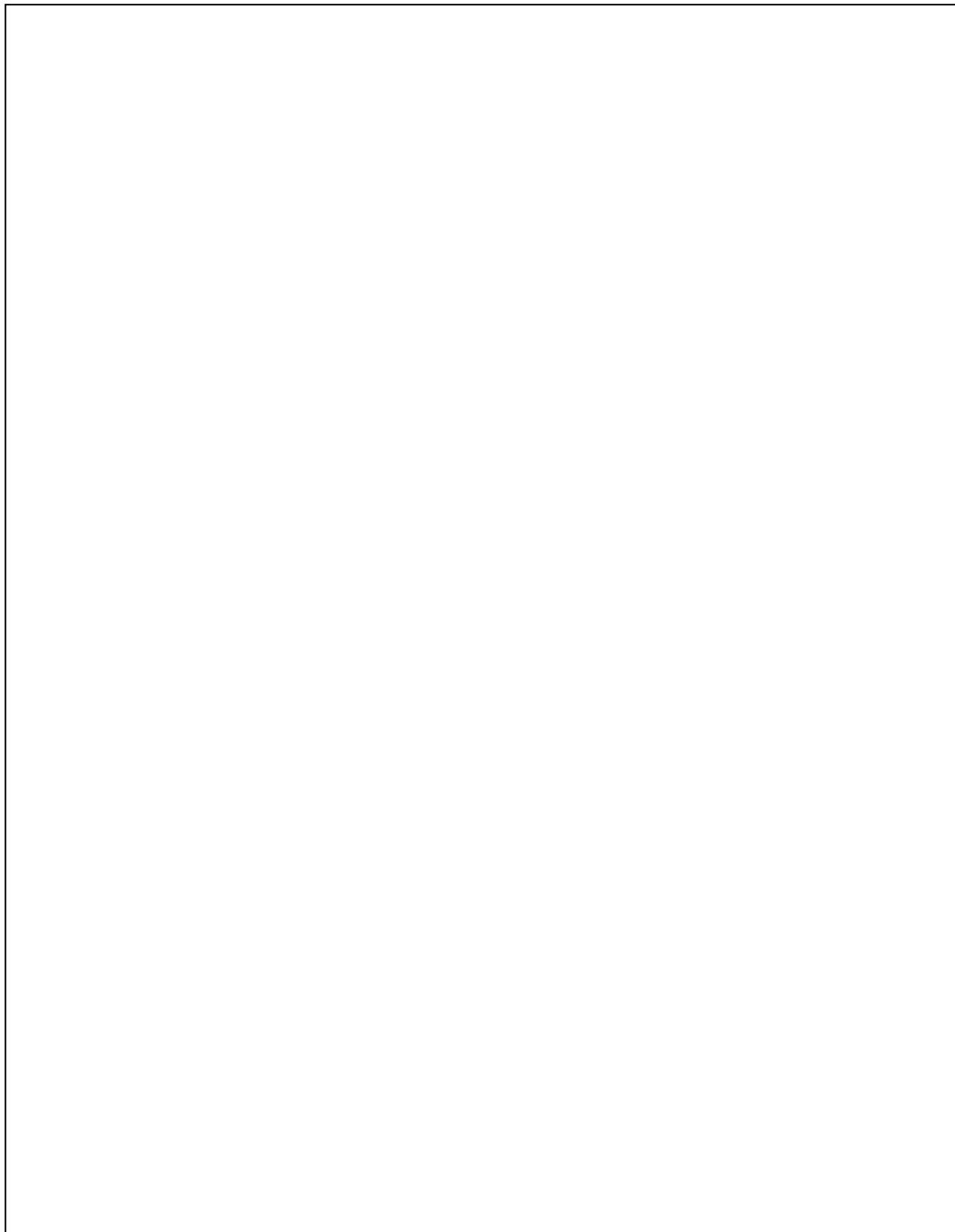
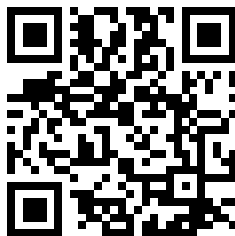
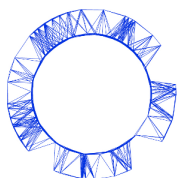


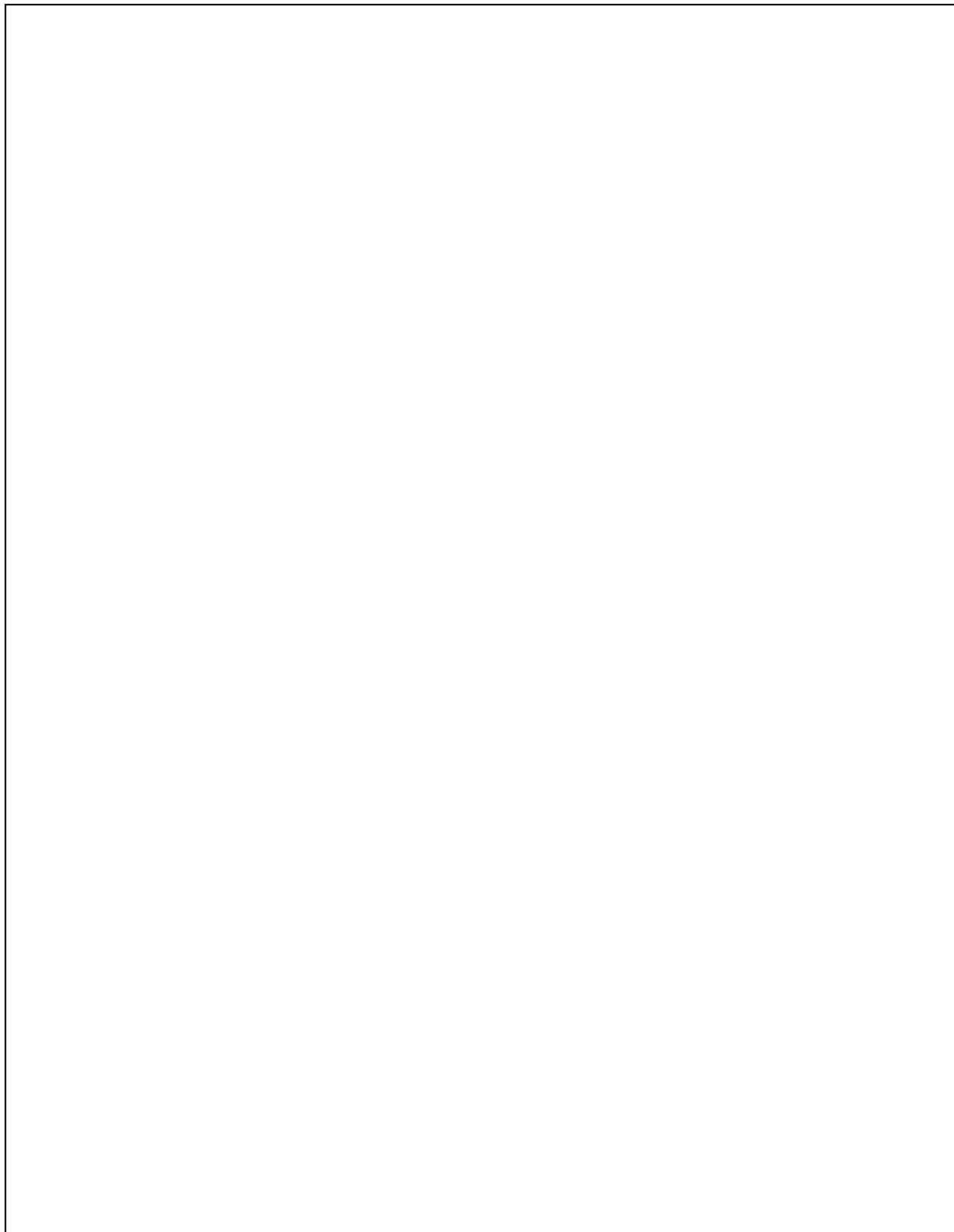
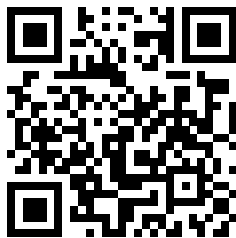
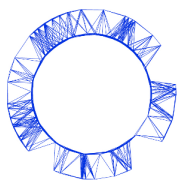


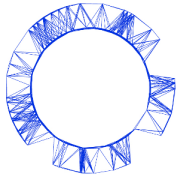












Physics of Live Systems (10 points)

Data: Normal atmospheric pressure, $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

Part A. The physics of blood flow (4.5 points)

In this part you will analyse two simplified models of blood flow in vessels.

Blood vessels are approximately cylindrical in shape, and it is known that for a steady, non turbulent flow of an incompressible fluid in a rigid cylinder, the difference in pressure of the fluid at the two ends of the cylinder is given by

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

where ℓ and r are the length and radius of the cylinder, η is the fluid viscosity and Q is the volumetric flow rate, i.e. the fluid volume that passes the cylinder cross section per unit time. This expression is often able to provide the correct order of magnitude for the pressure difference in a vessel, even without taking into account the pulsatile flow, the vessel's compressibility and irregular shape, and the fact that blood is not a simple fluid but a mixture of cells and plasma. Moreover, this expression has the same form as Ohm's law, with the volumetric flow rate being interpreted as a current, the difference in pressure as a voltage, and the factor $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ as a resistance.

Consider for example the symmetrical network of arterioles (small arteries) depicted in Figure 1 that delivers blood to the capillary bed of a tissue. In this network, at each bifurcation a vessel is divided in two identical vessels. However, the vessels of higher levels are thinner and shorter: consider that the radii and lengths of vessels in two consecutive levels, i and $i + 1$, are related by $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ and by $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$.

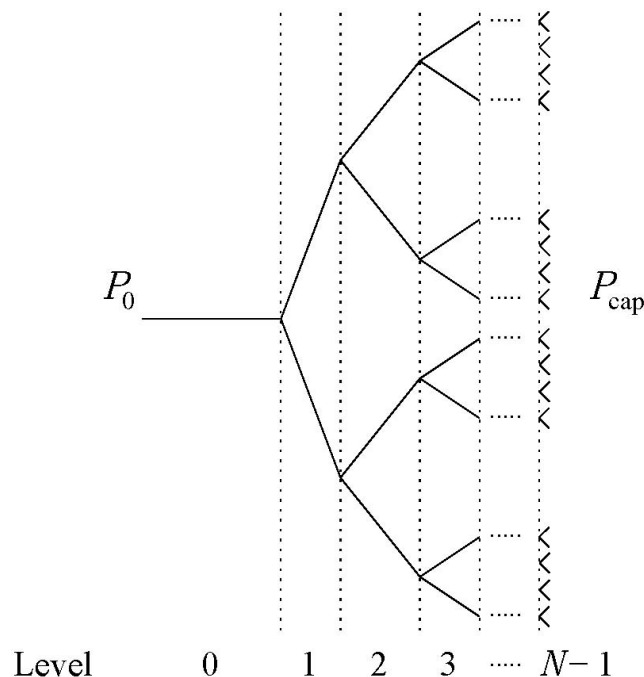
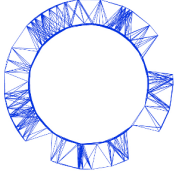


Figure 1. Network of arterioles.



A.1 Obtain an expression for the volumetric flow rate, Q_i , in a vessel at any level i , as a function of the total number of levels N , of the viscosity η , of the radius r_0 and length ℓ_0 of the first vessel, and of the difference $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ between the pressure at the arteriole at level 0, P_0 , and the pressure at the capillary bed, P_{cap} . 1.3pt

A.2 Calculate the numerical value of the volumetric flow rate Q_0 of the arteriole at level 0, if its radius is 6.0×10^{-5} m and its length is 2.0×10^{-3} m. Consider that the pressure at the arteriole inlet is 55 mmHg and the vessel network has $N = 6$ levels linking this arteriole to the capillary bed at the pressure 30 mmHg. Consider that the blood viscosity is $\eta = 3.5 \times 10^{-3}$ kg m⁻¹ s⁻¹. Express your result in ml/h. 0.5pt

A blood vessel as an LCR circuit

The approximation of rigid cylindrical vessels falls short for several reasons. It is particularly important to include the time dependent flow and to take into account the change in vessel diameter that occurs when the pressure varies during a blood pumping cycle done by the heart. Moreover, it is observed that in the larger vessels the blood pressure varies significantly during a cycle, while in the smaller vessels the amplitude of the oscillations in pressure is much smaller, and the flow is almost time independent.

When the pressure increases in a single elastic vessel, there will be an increase in its diameter, thus permitting to store more fluid in the vessel, and to deliver it when the pressure drops. For this reason, the elastic behaviour of the vessel can be simulated by adding a capacitor to our initial description. Moreover, when taking into account the time dependent blood flow rate, one has to consider the inertia of the fluid, proportional to its density $\rho = 1.05 \times 10^3$ kg m⁻³. This inertia can be described by an inductance in our model. In Figure 2 we represent the equivalent circuit for a single vessel in this model. The equivalent capacitance and inductance are given by

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{and} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

respectively, where h is the width of the vessel wall and E is the artery Young's modulus, a coefficient that describes the alteration in size of the vessel tissue when a force is applied. The Young's modulus has units of pressure and is on the order of $E = 0.06$ MPa for arterioles.

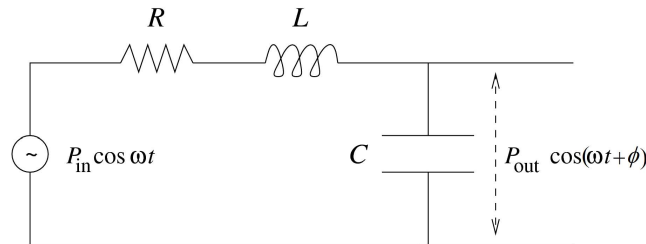
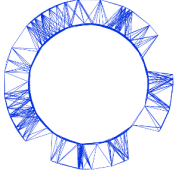


Figure 2. Equivalent electric circuit for a single vessel.



A.3 Obtain, in the stationary regime, the pressure amplitude at the vessel outlet, P_{out} , as a function of the pressure amplitude at the inlet, P_{in} , the equivalent resistance, R , inductance, L and capacitance, C , for a flow with angular frequency ω . Establish the condition between η , ρ , E , h , r and ℓ so that, for low frequencies, the pressure oscillation amplitude at the outlet is smaller than that of P_{in} . 2.0pt

A.4 For the vessel network in **A.2** estimate the maximum arteriole wall thickness h so that the condition established in **A.3** is satisfied (consider that h is level independent). 0.7pt

Part B. Tumour growth (5.5 points)

Tumour growth is a very complex process where biological mechanisms such as cell proliferation and natural selection are intertwined with physics. In this problem we will consider a simplified model of tumour growth that addresses the increase in pressure commonly observed in solid tumors.

Consider a group of normal cells forming a tissue surrounded by an inextensible basement membrane, which forces the tissue to maintain always the same form: a sphere of radius R (Figure 3).

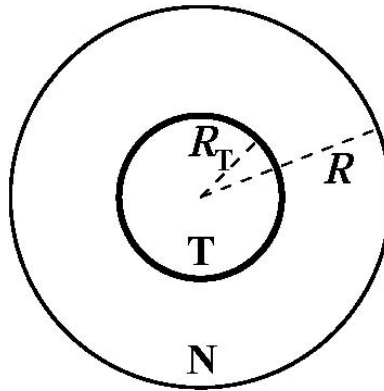


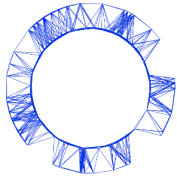
Figure 3. Simplified tumour.

Initially the tissue does not have residual stresses, i.e. the pressure at every point is equal to the atmospheric pressure.

At time $t = 0$, a tumour starts growing at the centre of this sphere and, as it grows, the pressure inside the tissue increases. Consider that both tissues (normal, N, and tumour, T) are compressible such that their densities, ρ_N and ρ_T , increase linearly with pressure:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

where ρ_0 is the rest tissue density, p is the pressure difference to the atmospheric pressure and K_N , K_T are the compressibility moduli (bulk moduli) of the normal and tumour tissues, respectively. In general, tumours are stiffer and so they have a higher bulk modulus.



- B.1** The mass of normal cells is not altered while the tumour is growing. Obtain the ratio between the tumour volume and the total tissue volume, $v = V_T/V$, as a function of the ratio between the tumour mass (M_T) and the normal tissue mass (M_N), $\mu = M_T/M_N$ and the ratio of the bulk moduli, $\kappa = K_N/K_T$. 1.0pt

Hyperthermia is sometimes used together with chemotherapy and radiotherapy in the treatment of cancer. In hyperthermia the cancer cells are selectively heated from the normal human body temperature, 37 °C, to temperatures above 43 °C, inducing their death. Researchers are currently developing carbon nanotubes covered with special proteins capable of binding to tumour cells. When the tissue is irradiated with near-infrared radiation, the nanotubes absorb it in a much greater extent than the surrounding tissues and therefore can be selectively heated as well as the tumour cells to which they are attached.

Consider that the tumour, the normal cells and the surrounding tissue have a constant thermal conductivity k , i.e. in the geometry of this problem, the energy that crosses a spherical surface of radius r per unit time and per unit area is equal to k times the derivative of the temperature with respect to r . The nanotubes are uniformly distributed in the tumour volume and are able to deliver a power $\mathcal{P}$ of thermal energy per unit volume. Assume that the temperature is equal to the normal human body temperature very far away from the tumour.

- B.2** Obtain, for the stationary state, the temperature at the centre of the tumour as a function of $\mathcal{P}$, k , the human body temperature and the tumour radius, R_T . 1.7pt

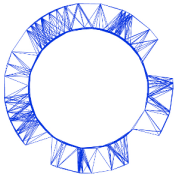
- B.3** Obtain the minimum power per unit volume, $\mathcal{P}_{\min}$, needed to heat up all tumour cells in a tumour with 5.0 cm radius to a temperature larger than 43.0 °C. Take the thermal conductivity of the tissue to be equal to $k = 0.60 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$. 0.5pt

Consider that the tumour is irrigated by a vessel network with a branched structure like in question **A.1**. As the tumour grows, when its pressure p becomes larger than the pressure P_{cap} at the thinnest vessels, the radii of these vessels will decrease by a small amount δr . If this pressure reaches a critical value p_c (which would correspond to a radius decrease of δr_c), the thinnest vessels would collapse, compromising seriously the irrigation to the tumour. The pressure and the radius change can be related by the following phenomenological relation:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Consider that just the smallest vessels (of level $N-1$) have their radius altered when the tumour increases its pressure.

- B.4** In the linear regime (i.e. consider that $p - P_{\text{cap}}$ is very small), express the relative drop in the flow rate, $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$, in these thinnest vessels, as a function of the tumour volume ratio $v = V_T/V$ and K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} , P_{cap} . 2.3pt



Fysica in Levende Systemen (10 punten)

Data: standaard atmosferische druk, $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

Deel A. Fysica van bloedstroming (4.5 punten)

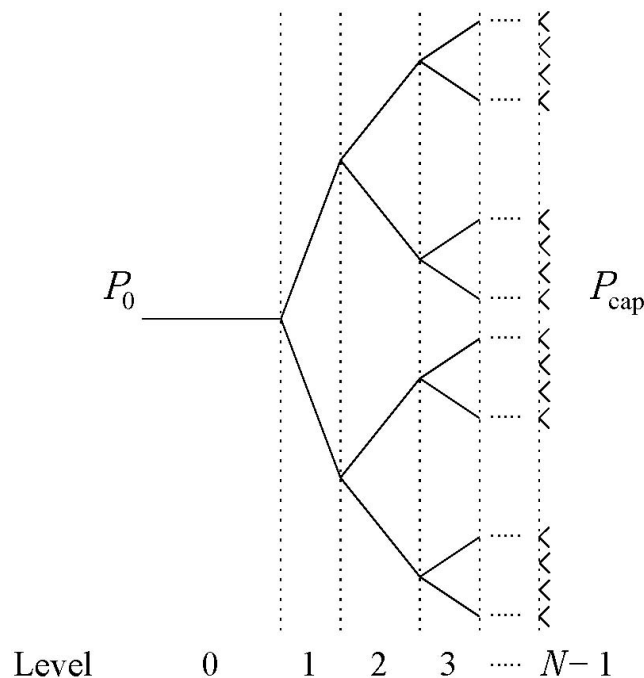
In dit deel zul je twee simpele modellen van bloedstroming door bloedvaten bestuderen.

Bloedvaten zijn bij benadering cilindervormig, en het is bekend dat voor een constante, niet turbulente stroming van een niet samendrukbare vloeistof door een starre cilindrische buis, het drukverschil tussen begin en uiteinde van de cilinder, wordt gegeven door:

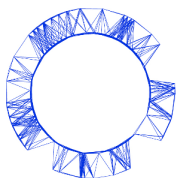
$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

waarbij ℓ en r respectievelijk de lengte en straal zijn van de cilinder, η de viscositeit van de vloeistof en Q het volumedebiet, dit is het volume van de vloeistof die door de cilinderdoorsnede stroomt per tijdseenheid. Met behulp van deze uitdrukking is het vaak mogelijk om de juiste orde van grootte van het drukverschil in een bloedvat te bepalen, zelfs zonder hierbij rekening te houden met het pulserende karakter van de bloedstroming, de samendrukbaarheid en onregelmatige vorm van het bloedvat, en het feit dat bloed niet een gewone vloeistof is, maar eerder een mengsel van plasma en cellen. Bovendien, is deze uitdrukking analoog aan de wet van Ohm, waarbij het volumedebiet overeenkomt met de elektrische stroom, het drukverschil met de spanning en de factor $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ met de weerstand.

Beschouw als voorbeeld een symmetrisch stelsel van arteriolen (kleine slagaders) zoals weergegeven in Figuur 1 dat bloed aanlevert aan een capillair netwerk in een weefsel. In dit stelsel, wordt bij elke splitsing een bloedvat vertakt in twee identieke bloedvaten. Echter, de bloedvaten van een hoger niveau zijn dunner en korter: neem aan dat de straal en de lengte van bloedvaten in opeenvolgende niveaus, i en $i + 1$, respectievelijk gegeven worden door $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ en $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$.



Figuur 1. Een bloedvatenstelsel.



- A.1** Leid een uitdrukking af voor het volumedebiet, Q_i , door een bloedvat in elk niveau i , als functie van het totaal aantal niveaus N , de viscositeit η , de straal r_0 en lengte l_0 van het eerste bloedvat, en het drukverschil $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ tussen de druk P_0 aan de inlaat van het bloedvat in niveau 0 en de druk P_{cap} in het capillaire netwerk. 1.3pt

- A.2** Bereken de numerieke waarde van het volumedebiet Q_0 in het bloedvat van niveau 0, indien de straal gelijk is aan 6.0×10^{-5} m en de lengte gelijk is aan 2.0×10^{-3} m. Neem aan dat de druk aan de inlaat van dit bloedvat gelijk is aan 55 mmHg en het bloedvatenstelsel $N = 6$ niveaus heeft, die dit bloedvat koppelt aan het capillaire netwerk bij een druk van 30 mmHg. Neem aan de viscositeit van bloed gelijk is aan $\eta = 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Druk jouw antwoord uit in ml/h. 0.5pt

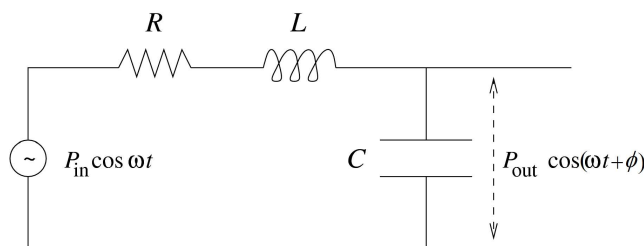
Een bloedvat gemodelleerd als LCR circuit

De benadering van een star cilindrisch bloedvat schiet tekort om verschillende redenen. Het is enorm belangrijk om rekening te houden met de tijdsafhankelijke stroming en de verandering van de diameter van het bloedvat als de druk varieert tijdens het pompen van bloed door het hart (bloedsomloop cyclus). Bovendien verandert de bloeddruk in grote bloedvaten significant gedurende de bloedsomloop cyclus, terwijl in kleinere bloedvaten de amplitude van de oscillaties in druk veel kleiner is, en de stroming nagenoeg tijdsafhankelijk is.

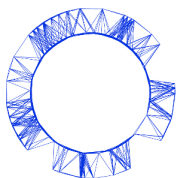
Wanneer de druk toeneemt in een elastisch bloedvat, zal zijn diameter toenemen, waardoor de opslag van meer vloeistof hierin wordt bevorderd, en om de opgeslagen vloeistof af te leveren wanneer de druk daalt. Om deze reden kan het elastisch gedrag van een bloedvat gemodelleerd worden door een condensator toe te voegen aan onze initiële beschrijving. Bovendien, wanneer de tijdsafhankelijkheid het debiet van de bloedstroming wordt beschouwd, moet rekening worden gehouden met de traagheid van de vloeistof, die evenredig is met zijn dichtheid $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Deze traagheid kan beschreven worden als een spoel in ons model. In Figuur 2 is een equivalent elektrisch circuit weergegeven voor het model van een enkel bloedvat. De equivalente capaciteit C en zelf-inductie L zijn gegeven door

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{en} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

waarbij respectievelijk h de dikte is van de wand van het bloedvat en E de Young's modulus is van het bloedvat. Dit is een coëfficiënt die de verandering van de grootte van het bloedvat weefsel beschrijft als er een kracht op wordt uitgeoefend. De Young's modulus heeft dezelfde eenheid als die van druk en heeft een waarde van ongeveer $E = 0.06 \text{ MPa}$ voor kleine bloedvaten (of arteriolen).



Figuur 2. Equivalent elektrisch circuit voor een enkele bloedvat.



A.3 Leid voor het stationaire regime de amplitude af van de druk aan de uitlaat van het bloedvat, P_{out} , als functie van de amplitude van de druk aan de inlaat, P_{in} , de equivalente weerstand R , de zelf-inductie L , en capaciteit C , voor een stroming met hoekfrequentie ω .

Geef de voorwaarde tussen η, ρ, E, h, r en l , zo, dat bij lage frequenties, de druk amplitude aan de uitlaat P_{out} kleiner is dan die bij de inlaat P_{in} .

2.0pt

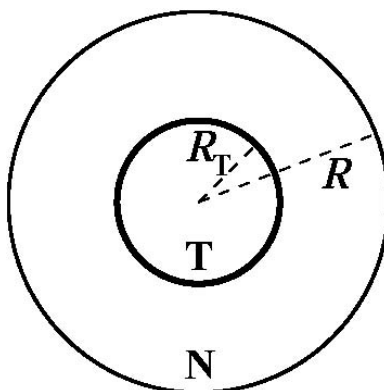
A.4 Maak een schatting voor de maximale waarde van de dikte van de bloedvatwand h voor het bloedvatenstelsel uit A.2 zodanig dat er voldaan wordt aan de voorwaarde uit A.3 (neem aan dat h onafhankelijk is van het niveau).

0.7pt

Deel B. Groei van een tumor (5.5 punten)

De groei van een tumor is erg complex, biologische mechanismen zoals een sterke toename van celdeling en natuurlijke selectie zijn verweven met fysica. In dit probleem beschouwen wij een simpel model van tumorgroei dat de toename van de druk beschrijft, zoals die vaak gezien wordt in vaste tumoren.

Beschouw een groep van normale cellen die een weefsel vormen omgeven door een niet-uitrekbaar basaal membraan. Dit membraan dwingt het weefsel om niet van vorm te veranderen: een bol met straal R (Figuur 3).



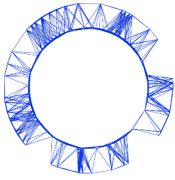
Figuur 3. Vereenvoudigde tumor.

Initieel heeft het weefsel geen restspanning, oftewel de druk is op elk punt gelijk aan de atmosferische druk.

Op het tijdstip $t = 0$, begint een tumor te groeien in het middelpunt van deze bol. Als de tumor groeit neemt de druk in het weefsel toe. Beschouw dat beide weefsels (normaal N en tumor T) samendrukbaar zijn zodat hun dichtheden ρ_N en ρ_T , lineair toenemen met de druk:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

Hierin zijn ρ_0 de initiële dichtheid is van het weefsel, p het drukverschil met de atmosferische druk en K_N, K_T de samendrukbaarheidscoëfficiënten (bulk moduli) van het normale en tumor weefsel. In het algemeen zijn tumoren stijver en hebben deze een grotere bulk modulus.



- B.1** De massa van de normale cellen verandert niet als de tumor groeit. Leid de verhouding $v = V_T/V$ af tussen het volume van de tumor V_T en het totaal volume V , als functie van de verhouding tussen de massa van de tumor (M_T) en de massa van het normale weefsel (M_N , $\mu = M_T/M_N$, en de verhouding tussen de bulk moduli, $\kappa = K_N/K_T$. 1.0pt

Hyperthermie wordt soms in combinatie met chemotherapie en radiotherapie toegepast voor de behandeling van kanker. Bij hyperthermie worden kankercellen selectief opgewarmd van normale lichaamstemperatuur, 37°C , tot temperaturen boven 43°C . Dit leidt tot destructie van deze cellen. Onderzoekers zijn momenteel bezig met het ontwikkelen van koolstof nanobuisjes bedekt met speciale eiwitten die zich kunnen binden aan tumor cellen. Als het weefsel wordt bestraald met nabij-infrarode straling, absorberen deze nanobuisjes de straling in veel grotere mate dan het omringende weefsel. De tumor cellen kunnen dus selectief worden opgewarmd.

Neem aan dat de tumor, de normale cellen en het omringende weefsel een constante warmtegeleidingscoëfficiënt k hebben. Anders gezegd: Neem aan dat, in de geometrie van dit probleem, de energie die getransporteerd wordt door een bolvormig oppervlak met straal r per tijdseenheid en per oppervlakte-eenheid, gelijk is aan k keer de afgeleide van de temperatuur naar r . De nanobuisjes zijn uniform verdeeld over het volume van de tumor en kunnen een vermogen P aan thermische energie per volume-eenheid leveren. Neem aan dat de temperatuur gelijk is aan normale lichaamstemperatuur van de mens ver verwijderd van de tumor.

- B.2** Leid, voor de stationaire toestand, een vergelijking af voor de temperatuur in het centrum van de tumor als functie van $\mathcal{P}$, k , de lichaamstemperatuur van de mens, en de straal R_T van de tumor. 1.7pt

- B.3** Bereken het minimale vermogen per volume-eenheid, dat nodig is om alle tumorcellen in een tumor met een straal van een straal van 5.0 cm op te warmen tot een temperatuur hoger dan $43,0^\circ\text{C}$. Neem voor de warmtegeleidingscoëfficiënt van het weefsel $k = 0.60\text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$. 0.5pt

Stel dat de tumor gevoed wordt door een stelsel van bloedvaten waarvan de structuur lijkt op deze in vraag **A.1**. Als de tumor groeit, neemt zijn druk p toe.

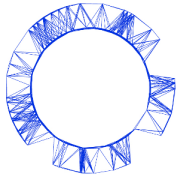
Als de druk p groter wordt dan de druk P_{cap} in de kleinste bloedvaten, zullen de stralen van de kleinste bloedvaten een klein beetje δr kleiner worden.

Als de druk een kritische waarde p_c bereikt (die overeen zou komen met een verkleining van de straal δr_c), klappen de kleinste bloedvaten dicht, en bedreigen daarmee de toevoer naar de tumor serieus.

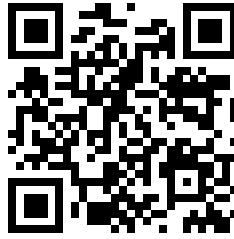
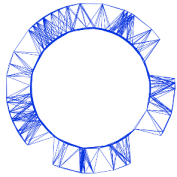
De druk en de verandering van straal wordt gegeven via de volgende fenomenologische relatie:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Bedenk dat alleen van de dunste bloedvaten (van niveau $N - 1$) de straal verandert als de druk van de tumor toeneemt.



- B.4** We beschouwen het lineaire gebied, oftewel $p - P_{\text{cap}}$ erg klein. 2.3pt
Leid een uitdrukking af voor de relatieve daling van het volumedebiet $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$ in deze dunste bloedvaten als functie van de tumor-volumeratio $v = V_T/V$ en K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} , P_{cap} .



Fysica in levende systemen (10 punten)

Deel A. Fysica van bloedstromen (4.5 punten)

A.1 (1.3 pt)

$$Q_i =$$

A.2 (0.5 pt)

$$Q_0 =$$

A.3 (2.0 pt)

$$P_{\text{out}} =$$

Voorwaarde:

A.4 (0.7 pt)

$$\text{Maximum } h =$$

Deel B. Groei van een tumor (5.5 punten)

B.1 (1.0 pt)

$$v =$$

B.2 (1.7 pt)

Temperatuur:

B.3 (0.5 pt)

$$\mathcal{P}_{\text{min}} =$$

B.4 (2.3 pt)

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq$$

