Uitwerkingen ronde 3 theorie 2018

1. Spelen met water

Duitsland 2018-R2 Aufgabe 1 Mechanische Spielereien Lösung 1.1 Wasserspiel

a. (2) Er is geen wrijving, je kunt daardoor eenvoudig de snelheid van het water met een energiebeschouwing uitrekenen:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g L \sin\alpha \qquad \text{und damit} \qquad v = \sqrt{2 g L \sin\alpha}\,. \tag{1.1}$$

De snelheid in de y-richting bij het verlaten van de goot is dan $v_y = v \sin\alpha$.

Voor het vallen in de y-richting kun je dan schrijven:

$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v \sin\alpha\, t \tag{1.2}$$

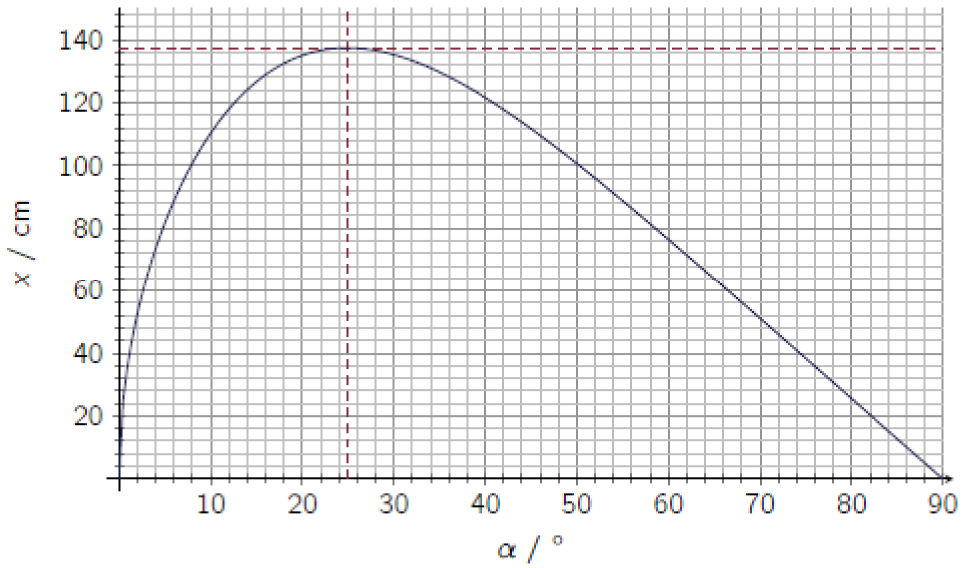
De grond wordt bereikt als $y = h$. Hieruit kun je de tijd bepalen die het water nodig heeft om op de grond te komen:

$$t_{\text{Boden}} = \sqrt{\frac{2L}{g}} \left(\sqrt{\sin^3\alpha + \frac{h}{L}} - \sin^{3/2}\alpha \right) \tag{1.3}$$

In horizontale richting is na het verlaten van de goot de snelheid constant. Met de uitgerekende tijd kun je dan noteren:

$$\boxed{x = v \cos\alpha\, t_{\text{Boden}} = 2L\sqrt{\sin\alpha}\,\cos\alpha \left(\sqrt{\sin^3\alpha + \frac{h}{L}} - \sin^{3/2}\alpha \right)}\,. \tag{1.4}$$

Je ziet dus g niet terug in de afstand!



b. (1) Uit de grafiek kun je het maximum aflezen. x_{max} = (137 ±1) cm bij de hoek $\alpha = (25 \pm 1)°$. (1.5)

Zonder grafiek wordt het de afgeleide bepalen en 0 stellen…

Bewertung - Mechanische Spielereien Punkte

1.a) Bestimmen der Wassergeschwindigkeit am Ende der Rinne (1.1)	2
Annehmen eines freien Falls außerhalb der Rinne	1
Bestimmen der Fallzeit des Wassers (1.3)	2
Ableiten der beim Fallen zurückgelegten horizontalen Strecke (1.4)	1
Formulieren eines sinnvollen Ansatzes zur Bestimmung des Maximums (graphisch, numerisch, . . .)	2
Bestimmen eines Wertes für die Weite mit 135 cm _ xmax _ 139 cm	1
Bestimmen eines Wertes für den Winkel mit 23_ _ _ _ 27_	1

2. De veer en twee zuigers.

Solution Challenge 2018-2 **The spring in the winter**

a. (0,5)Bij schuiven van rechter zuiger naar rechts wordt de druk tussen zuigers kleiner, hierdoor schuift linker zuiger naar rechts want kracht links is groter kracht rechts

b. (2) Let x be the displacement of the left piston from its initial position. The distance between pistons increases from l to $2l-x$.

By Boyle's Law, the final pressure of the gas inside the cylinder is:$P = P_{atm}\frac{l}{2l-x}$

In the end, the piston on the left is in static equilibrium under the force of the spring, the pressure of the surrounding atmosphere (on its left-hand side), and the pressure of the gas inside the cylinder (on its right-hand side):$kx + PA = P_{atm}A$

Eliminating P between the previous two equations gives after simplification

$$0 = kx^2 - (P_{atm}A + 2lk) + lP_{atm}A$$

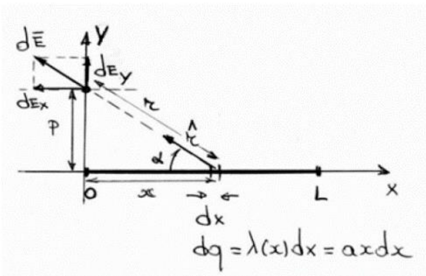
Of the two roots of this quadratic equation, we keep the one whose value is between 0 and l:

$$x = \frac{(P_{atm}A+2lk)-\sqrt{(P_{atm}A)^2+(2lk)^2}}{2k}$$

The system comprising the two pistons and the gas inside the cylinder is in static equilibrium, which implies that the force F is equal to the elastic force from the spring,

c. (0,5) isotherm, dus $W = \int_{V1}^{V2} pdV = nRT\ln\frac{V2}{V1} = nRT\ln\left(\frac{Al}{A(2l-x)}\right) = nRT\ln\left(\frac{l}{2l-x}\right) = nRT\ln\left(\frac{2kl}{2kl-Ap_{atm}+\sqrt{(Ap_{atm})^2+(2kl)^2}}\right)$

3. Een draad vol lading



a. (1)

$\sigma(x) = ax$ voor $0 \leq x \leq L$.

Dus $Q = \int_0^L axdx = a\int_0^L xdx = \frac{1}{2}aL^2$.

b. (2)

beschouw een klein stukje draad dx bij x, daarvoor geldt

$dq = \sigma(x)dx = axdx$

Het veld in P van dit stukje lading is $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$

$r^2 = x^2 + p^2$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ en $\sin\alpha = \frac{p}{r}$

Dan kunnen we de x en y uit elkaar halen en apart berekenen.

$$dE_x = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{-a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x^2}{(x^2+p^2)^{3/2}}dx$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{p}{r} = \frac{ap}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+p^2)^{3/2}}dx$$

Dit is alleen voor dq en moeten we dus nog sommeren(integreren) over het lijnstuk

$$E_x = \int_0^L dE_x = \frac{-a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{x^2dx}{(x^2+p^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{-a}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+p^2}}\right]_{x=0}^{L}$$

$$E_x = \frac{-a}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2+p^2}}{p}\right) - \frac{L}{\sqrt{L^2+p^2}}\right]$$

Analoog kom je dan ook uit op

$E_y = \int_0^L dE_y = \frac{ap}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{xdx}{(x^2+p^2)^{3/2}} \to E_y = \frac{ap}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+p^2}}\right]_{x=0}^{L} \to E_y = \frac{a}{4\pi\varepsilon_0}\left[1 - \frac{p}{\sqrt{(L^2+p^2)}}\right]$

4. Deeltjes en jets

a. (0,5) $s = vt = 0{,}999 \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 2 \cdot 10^{-18} = 6 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}.$

b. (0,5) $\tau' = \frac{\tau}{\gamma} = 2 \cdot 10^{-18} \cdot \sqrt{1 - 0{,}999^2} = 2 \cdot 10^{-18} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2} = 9 \cdot 10^{-20}\mathrm{s}.$

c. (1) $v_x' = \frac{v_x + 0{,}999c}{1 + \frac{v_x \cdot 0{,}999}{c}} = \frac{0{,}5\cos\theta + 0{,}999}{1 + 0{,}4995\cos\theta} c$

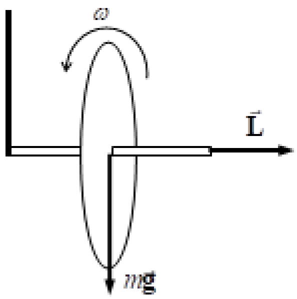
$v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left(1 + \frac{v_x \cdot 0{,}999}{c}\right)} = \frac{0{,}5\sin\theta}{\gamma(1 + 0{,}4995\cos\theta)} c$

En $v_z' = v_z = 0$

d. (1) $\tan\theta' = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{0{,}5}{\gamma(0{,}999)} = \frac{0{,}5}{0{,}999} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2} = 2{,}25 \cdot 10^{-2} \rightarrow \theta' = 1{,}29°$

5. gyroscoop

(a) (0,5) In the figure, the torque from gravity is directed back into the paper. This gives the direction of precession. When viewed from above, the wheel will precess $\boxed{\text{counterclockwise}}$.



(b) (1,5) The period of precession is related to the reciprocal of the angular precessional frequency.

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi I\omega}{Mgr} = \frac{2\pi\left[\frac{1}{2}Mr_{\text{disk}}^2\right]2\pi f}{Mgr} = \frac{2\pi^2 f r_{\text{disk}}^2}{gr} = \frac{2\pi^2(45\,\text{rev/s})(0.055\,\text{m})^2}{(9.80\,\text{m/s}^2)(0.105\,\text{m})}$$

$$= 2.611\,\text{s} \approx \boxed{2.6\,\text{s}}$$

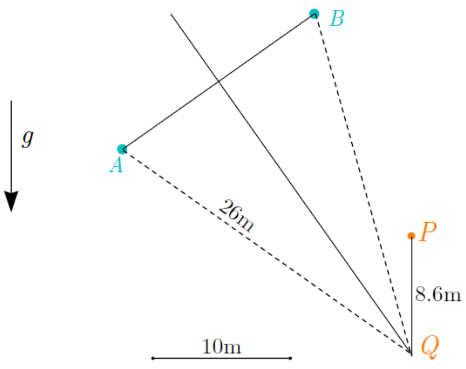
(c) (1) Use the relationship $T = \frac{2\pi^2 f r_{\text{disk}}^2}{gr}$ derived above to see the effect on the period.

$$\frac{T_{\text{new}}}{T_{\text{original}}} = \frac{\dfrac{2\pi^2 f r_{\text{disk new}}^2}{g r_{\text{new}}}}{\dfrac{2\pi^2 f r_{\text{disk}}^2}{gr}} = \frac{\dfrac{r_{\text{disk new}}^2}{r_{\text{new}}}}{\dfrac{r_{\text{disk}}^2}{r}} = \left(\frac{r_{\text{disk new}}}{r_{\text{disk}}}\right)^2 \frac{r}{r_{\text{new}}} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \frac{1}{2} = 2$$

So the period would double, and thus be $T_{\text{new}} = 2T_{\text{original}} = 2(2.611\,\text{s}) = 5.222\,\text{s} \approx \boxed{5.2\,\text{s}}$.

6 twee ballen gegooid

Neem een stelsel in vrije val. De ballen bewegen daar met constante snelheid. Het punt waar ze vandaan gegooid zijn, ligt dan op de middelloodlijn tussen de punten A en B. Het frame valt recht naar beneden. Dus de ballen moeten vanaf punt Q gegooid zijn. Meten levert voor AQ 26 m op en voor PQ 8,6 m.



$s = 0{,}5gt^2 \;\rightarrow t = \sqrt{\frac{s}{0{,}5g}} = 1{,}3$ s.

Daarmee $v = \frac{s}{t} = \frac{26}{1{,}3} = 20$ m/s.

7. Serieschakeling

Antw:

a. (1,5) In deze serieschakeling geldt voor de impedantie: $Z = \sqrt{\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)}$

Deze is minimaal als $(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 0$ en dus $\omega = \sqrt{(\frac{1}{LC})}$ wat geeft dat

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} = 6{,}5 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}$$

Dan geldt dus $I=U/R$=20/100= 0,2A.

b. (1,5) Bij 500 Hz moeten we eerst Z uitrekenen:

$$Z = \sqrt{\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)} = \sqrt{\left(100^2 + \left(2\pi 500 \cdot 0{,}3 - \frac{1}{2\pi 500 \cdot 200 \cdot 10^{-9}}\right)^2\right)} = 947\Omega$$

$I=U/Z$=20/947=0,021A:

$Z_L = \omega L = 2\pi 500 \cdot 0{,}3 = 941\Omega$ en $U=IZ$=0,021*941=19,9V.

8. R en C.

De bovenste tak moet stroomloos zijn, met een ongeladen en dus spanningloze condensator doet de weerstand er niet toe en geldt dat zowel de spanning over R_1 en E als over R_2 en 4E gelijk moet zijn aan 2E.

De grootte van de stroomsterkte I door R_1 en R_2 moet gelijk zijn.

$\begin{matrix} IR_1 + E = 2E \\ IR_2 + 4E = 2E \end{matrix}$ hieruit volgt dat $\begin{matrix} IR_1 = E \\ IR_2 = 2E \end{matrix}$ wat betekent dat de groote van R_2 2 keer die van R_1 moet zijn, dus $R_1 = 40\Omega$

9. Fietspomp

a. (0,5) pt D.

b. (1,5) bij B iets hoger (zie A) en dan weer zakken tot lijn CD

c. (1) $p_A V_A = p_B V_B \rightarrow 2220 \cdot (235 + V_{band}) = 2320 \cdot (40 + V_{band}) \rightarrow V_{band} = 4300\ \mathrm{cm}^3$

10. Interferentie

a) (1,5) $E_p^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(\pi - \phi)$

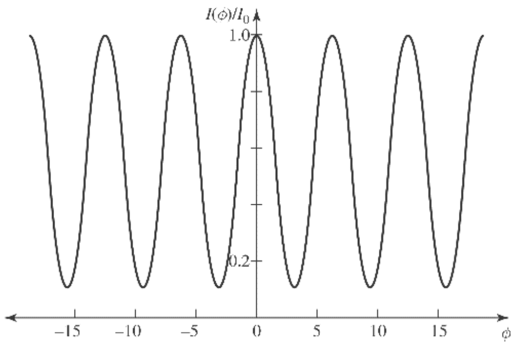
$= E^2 + 4E^2 + 4E^2\cos\phi = 5E^2 + 4E^2\cos\phi.$

$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 cE_p{}^2 = \varepsilon_0 c\left[\left(\frac{5}{2}E^2\right) + \left(\frac{4}{2}E^2\right)\cos\phi\right].$

$\phi = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{9}{2}\varepsilon_0 cE^2.$

So $I = I_0\left[\frac{5}{9} + \frac{4}{9}\cos\phi\right].$

b) (1)



c) (0,5) $I_{\min} = \frac{1}{9}I_0$ which occurs when $\phi = n\pi (n \text{ odd})$.