Eindronde Natuurkunde Olympiade 2017
Antwoorden

Opgave 1 Karretje (Mazur, Peer Instruction)
Verandering in snelheid en impuls zijn altijd hetzelfde in twee verschillende inertiaal stelsels die met een constante snelheid t.o.v. elkaar bewegen.
Stel het bewegende stelsel heeft een snelheid u t.o.v. het stelsel van de Aarde en in tegengestelde richting van de snelheid van het karretje. Het karretje heeft een snelheid v na het wegdrukken in het Aarde stelsel. Voor de verandering in de kinetische energie in het stelsel van de Aarde geldt:

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = \tfrac{1}{2}mv^2$$

Voor de verandering in het andere stelsel geldt:

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}m(v-u)^2 - \tfrac{1}{2}m(-u)^2 = \tfrac{1}{2}m(v^2 - 2uv) = \tfrac{1}{2}mv^2 - uv$$

De keuze van u bepaalt dus de waarde van de verandering van kinetische energie.

Opgave 2 Zeilboot (Oud olympiade vraagstuk)
Er geldt $w^2 = v^2 + u^2$en $\tan\alpha = v/u$
De totale kracht F_u richting u op de boot is $F\sin\beta - F_w$, omdat de F in andere richtingen voor het vraagstuk niet relevant is.
Bij maximale snelheid geldt dat de totale kracht $F_u = 0$ is.
Dus:

$$F\sin\beta - F_w = c_1\left(\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) - \beta\right)\cdot(v^2+u^2)\cdot\sin\beta - c_2u^2 = 0$$

Zodat:

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) - \beta\right)\cdot(1+(v/u)^2)\cdot\sin\beta = \frac{1}{30}$$

Zowel v/u als β zijn klein, zodat

$$\frac{1}{30} = \left(\frac{v}{u} - \beta\right)\cdot\beta = \frac{v}{u}\beta - \beta^2$$

Differentiëren naar β levert:

$$0 = -\frac{v}{u^2}\beta\frac{du}{d\beta} + \frac{v}{u} - 2\beta$$

(Productregel eerste term want u is een functie van β.)
De snelheid u is maximaal dus

$$\frac{du}{d\beta} = 0$$

Daaruit volgt dat:

$$\frac{v}{u} = 2\beta$$

$$\frac{v}{u} = 2\beta \;\rightarrow\; \beta^2 = \frac{1}{30} \rightarrow u = \frac{v}{2\sqrt{1/30}} \approx 2{,}7v$$

Opgave 3 Schijfje (A guide to physics problems)

Vanwege de cilindrische symmetrie van het schijfje kan er geen radiale afhankelijkheid zijn van de spanning. Daardoor kunnen we kijken naar een klein ringetje met dikte dr, omtrek $2\pi r$ en hoogte a. Als er een spanning U over het schijfje wordt gezet volgt dus

$$dI = \frac{Uadr}{2\pi r\rho}$$

Dit kunnen we integreren van $r = a$ tot $r = 2a$.

$$I = \int_a^{2a} dI = \int_a^{2a} \frac{Uadr}{2\pi r\rho} = \frac{a\ln 2}{2\pi\rho}U$$

De weerstand is dus

$R = \frac{2\pi\rho}{a\ln 2}$

De vervangingsweerstand is begrensd bij de weerstand van een balk met doorsnede a^2 en lengte $2\pi a$ of juist een lengte $4\pi a$. Oftewel:

$$\frac{2\pi\rho}{a} = R_a < R < R_{2a} = \frac{4\pi\rho}{a}$$

Opgave 4 Interferentie

(a) Voor positie y op het scherm komen de stralen aan met een hoek α. $l = N\lambda$ met N een (groot) positief geheel getal.
$\tan\alpha \approx \alpha = \frac{y}{L}$, want α is klein
Weglengteverschil Δ tussen de bron en de gespiegelde bron bij y is:
$\cos\alpha = \frac{\Delta}{2l} \rightarrow \Delta = 2l\cos\alpha = 2l\sqrt{1-\sin^2\alpha} \approx 2l\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right) = 2N\lambda - N\lambda\alpha^2$
De 'spiegel' zorgt met een optisch dichtere stof voor een fasesprong 0,5
Dat betekent voor de totale faseverschil $\varphi = \frac{\Delta}{\lambda} = 2N - N\alpha^2 + \frac{1}{2}$
Bij een maximum op het scherm geldt $\varphi = 2N - n$, (n geheel en positief) bij elke cirkel wordt dat dan:

$$\varphi = 2N - n = 2N - N\alpha^2 + \frac{1}{2}$$

$$2N - n = 2N - N\alpha^2 + \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{n + \frac{1}{2}}{N}} \rightarrow y_n = L\sqrt{\frac{n + \frac{1}{2}}{N}}$$

(b) De opzet is symmetrisch rondom de bron en de spiegelbron, er komen dus cirkels op het scherm. De stralen van de cirkels verhouden zich volgens opeenvolgende α, te weten $\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …

(c) Bij $y = 0$ is het faseverschil $2N + \frac{1}{2}$ en als je ongeveer boven de spiegel zit, dan is het faseverschil alleen door de fasesprong van de optisch dichtere stof, dus $\frac{1}{2}$. Het aantal maxima dat je dan tegenkomt is dus $2N$.

Opgave 5 Plaatcondensator (USA 2009)

The capacitance of a thin rectangular capacitor is given by

$$C = Q/U = \varepsilon_0 A/d$$

The electric field between the plates is given by

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 Ad}$$

so the potential difference between the plates must be

$$U = Ed = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

For the original capacitor C_0:

$$C_0 = Q/U_0 = \varepsilon_0 A/d$$

The energy stored in a capacitor is

$$E = \tfrac{1}{2}QU = \tfrac{1}{2}CU_0^2$$

so once charged, the initial energy is

$$E_0 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}U_0^2$$

Note, we are going to need to know the initial charge sooner or later, which is

$$Q_0 = C_0 U_0 = \frac{\varepsilon_0 A U_0}{d}$$

Inserting the conducting plate can be treated two ways: it results in the creation of two capacitors, in series, each with area A but differing separation. The net charge Q_0 won't change, that's why we needed it above, but the resulting capacitance of the system will be

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

For our capacitors, the only thing that changes is d, which we'll call x_1 and x_2. Then

$$\frac{1}{C_e} = \frac{x_1}{\varepsilon_0 A} + \frac{x_2}{\varepsilon_0 A}$$

which gives us

$$C_e = \frac{\varepsilon_0 A}{d/2} = 2C_0$$

Since the new total separation $x_1 + x_2$ is just $d - d/2$.
The energy in the system after inserting the plate is

$$E = \tfrac{1}{2}Q_0 U = \tfrac{1}{2}Q_0^2/C_e$$

since V is not constant!
Finally,

$$E = \tfrac{1}{2}Q_0^2/2C_0 = \tfrac{1}{2}E_0$$

The work done on the plate is the same as the work done on the system, which is given by

$$W = E - E_0$$

or

$$W = -\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_0 A}{d}U_0^2$$

This means that the plate is "sucked" into the original capacitor, and we have to fight to hold it out.

Opgave 6 Luidspreker (BPO 1985)

Als de luidspreker een afstand x wordt ingeduwd zal de lucht een (extra) kracht $F(x)$ uitoefenen op de conus. Stel dat het evenwichtsvolume V is en evenwichtsdruk is P. Dan volgt voor de adiabatische expansie van de lucht:

$$PV^\gamma = \left(P + \frac{F(x)}{A}\right)(V - Ax)^\gamma$$

$$P = \left(P + \frac{F(x)}{A}\right)\left(1 - \frac{Ax}{V}\right)^\gamma$$

Reeksontwikkeling in laatste term:

$$P = \left(P + \frac{F(x)}{A}\right)\left(1 - \frac{\gamma A x}{V}\right)$$

Haakjes wegwerken en laatste term verwaarlozen:

$$P = P + \frac{F(x)}{A} - \frac{\gamma P A x}{V} + ..$$

Dus vinden we voor de kracht $F(x)$:

$$F(x) = \frac{\gamma P A^2}{V} x$$

De kracht is echter in de tegenovergestelde richting als de uitwijking. We hebben dus een bewegingsvergelijking:

$$M\ddot{x} = -\frac{\gamma P A^2}{V} x$$

De oplossing hiervan is:

$$\omega^2 = \frac{\gamma P A^2}{V}$$

Oftewel:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P A^2}{V}}$$

Invullen levert het gegeven antwoord van 80 Hz op.

Opgave 7 Ontdooien (200 Puzzling Physics Problems)

De totale warmte is evenredig met de temperatuurgradiënt (temperatuurverschil gedeeld door de afstand), de oppervlakte en de tijd. Dus geldt:

$$\text{tijd} \propto \frac{\text{warmte capaciteit}}{\text{oppervlakte } \times \text{temperatuurgradiënt}} \propto \frac{L^3}{L^2 L^{-1}} = L^2$$

Omdat $M \propto L^3$ volgt dat de tijd evenredig is met $M^{2/3}$ en de mammoet zal dus $2(8000/5)^{2/3}$ dagen nodig hebben om te ontdooien. Dat is ongeveer 9 maanden. Uiteraard onder zelfde omstandigheden dus ze zijn beide tot eenzelfde temperatuur bevroren en ze ontdooien in vergelijkbare omgeving.

Opgave 8 Neutron scattering (A guide to physics problems)

We beschouwen een centrale elastische botsing van m tegen M met snelheden na de botsing resp. V en v, energie en impulsbehoud:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$mv_0 = MV + mv$$

Herschrijven

$$v_0^2 - v^2 = \frac{M}{m} V^2$$

$$v_0 - v = \frac{M}{m} V$$

Oplossen voor V

$$V = \frac{2}{\alpha + 1} v_0$$

Hierbij geldt $\alpha = M/m$. De kinetische energie van M wordt dan

$$T_M = \frac{MV^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2}\frac{4}{(\alpha+1)^2} = 4\frac{M}{m}\frac{mv_0^2}{2}\frac{1}{(\alpha+1)^2} = 4\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}T_0 = 4\frac{T_0}{\alpha+2+1/\alpha}$$

Het maximum van T_M correspondeert dus met een minimum van $\alpha + 2 + 1/\alpha$
Dat is dus voor $\alpha = 1$, dus $m = M$. Voor waterstof geldt dat α erg dicht bij 1 ligt en dat verklaart dus waarom materialen met een hoog waterstof gehalte zo efficiënt zijn in het blokkeren van neutronen.

Opgave 9 Relativiteit in de lift! (Diederik Roest)

(a) Het licht legt twee meter af, dus δt = 1 s en δx = 2 m.

(b) De eigentijd is nul, aangezien we over twee gebeurtenissen praten die via een lichtstraal verbonden zijn.

(c) In het stelsel van het gebouw beweegt het licht zowel horizontaal als verticaal. De eerste is nog steeds $\delta x'$ = 2 m (onveranderd door beweging).
Maar nu is $\delta y' = v\delta t'$ - dit is wat we met de snelheid van de lift bedoelen. Hierdoor krijgen we

$$\delta\tau^2 = \delta t'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 1 = 0$$

Met v = 1 m/s geeft dit $\delta t' = 2/\sqrt{3}$. Dit is natuurlijk de tijdsdilatatie factor.

Opgave 10 Een echte voeding (USA 2009)

De vervangingsweerstand van N identieke parallelle weerstanden R is

$$R_e = R/N$$

De totale weerstand van het circuit wordt dan $r + R/N$
De geleverde stroom door de voeding wordt dus

$$I = \frac{U_0}{r + R/N}$$

Het vermogen wordt dus:

$$P = I^2R_e = \frac{U_0^2}{(r+R/N)^2}\frac{R}{N} = NR\frac{U_0^2}{(Nr+R)^2}$$

Het kan bekend zijn dat bij een voeding het maximale vermogen gedissipeerd wordt als interne en aangesloten weerstand hetzelfde zijn. Er moet dus gelden $R = Nr$
Afleiding

$$\frac{dP}{dR} = N\frac{U_0^2}{(Nr+R)^2} + NR\frac{-2U_0^2}{(Nr+R)^3}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0$$

Oftewel

$$\frac{NU_0^2}{(Nr+R)^2} - \frac{2NRU_0^2}{(Nr+R)^3} = 0$$

Hier valt heel veel weg. Er blijft over

$$1 = \frac{2R}{Nr+R}$$

Dit is te herschrijven tot de eerdere vergelijking $R = Nr$

Opgave 11 Sjoelstenen (oud Olympiade opgave)
Stel dat de straal van elke sjoelsteen R is, en dat de massa per sjoelsteen m is, dan is vanaf de zijkant gezien de situatie als volgt:
De afstand van het midden van elke van de vier sjoelstenen ligt $R(\sqrt{2}-1)$ buiten de onderliggende sjoelsteen.
Het stuk van de vier damstenen dat binnen de onderliggende damsteen en het stapeltje ligt is:

$$R - R(\sqrt{2}-1) = R(2-\sqrt{2})$$

Pas nu per sjoelsteen (van de vier) de momentenstelling toe:

$$mgR(\sqrt{2}-1) = \frac{N}{4} mgR(2-\sqrt{2})$$

Waarin N het aantal sjoelstenen van het stapeltje is. Uitrekenen geeft $N \approx 2{,}8$; dus $N = 3$ is het minimum aantal dat het stapeltje dient te bevatten.

Opgave 12 een elektrisch circuitje (oud Olympiade opgave)
(a)

	I_1	I_2	U_C
$t = 0$	V_0/R	0	0
$t = \infty$	0	V_0/R	0

(b) Voor de totale stroom $I_1 + I_2$ geldt:

$$U_0 = (I_1 + I_2)R + U_C$$

Differentiëren naar de tijd:

$$\frac{dU_C}{dt} + R\frac{I_1}{dt} + R\frac{I_2}{dt} = 0$$

Met

$$U_C = \frac{1}{C}\int I_1 dt$$

en

$$-U_C = U_L = -L\frac{dI_2}{dt}$$

volgt:

$$\frac{dU_C}{dt} + RC\frac{d^2U_C}{dt} + \frac{R}{L}U_C = 0$$

de gegeven vergelijking voldoet aan de vorm.
(c) Invullen levert

$$\lambda = \frac{1}{2RC}$$

en

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

Opgave 13 Entropie (Alex de Vries)
In een adiabatisch proces is er geen uitwisseling van warmte-energie met de omgeving. Dit betekent dat de entropie van de omgeving niet verandert. Is het proces ook reversibel, dan is de totale entropieverandering nul. Dan is dus in een adiabatisch proces de

entropieverandering van het systeem nul. De expansie doet de ruimtelijke entropie toenemen; deze moet worden gecompenseerd door de kinetische entropie:

$$\Delta S_{systeem} = 0$$

$$\Delta S_{ruimte} + \Delta S_{kin} = 0$$

$$\Delta S_{ruimte} = -\Delta S_{kin}$$

$$Nk \ln \frac{V_2}{V_1} = -Nkq \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-q}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-q}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{1}{q}}$$

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{1}{q}}$$