

Algemene instructies: Theoretische toets

De theoretische toets duurt 5 uur en is in totaal 30 punten waard.

Voor de toets

Open de enveloppen met vragen niet voordat het geluidssignaal geklonken heeft, dat het begin van de toets inluidt.

Het begin en het eind van de toets worden aangegeven met een geluidssignaal. Elk uur wordt de verlopen tijd aangegeven, net als vijftien minuten voor het einde van de toets (voor het laatste geluidssignaal).

Tijdens de toets

- Er worden speciale antwoordvellen verstrekt om je antwoorden op in te vullen. Vul je uiteindelijke antwoorden in, in de geschikte vakken op het bijbehorende **antwoordvel**. Voor elk probleem zijn er extra lege **werkvellen** om **gedetailleerd werk** op uit te voeren. Gebruik altijd de werkvellen die horen bij het probleem waar je op dat moment mee bezig bent (check het nummer van het probleem boven aan het vel). Als je iets hebt opgeschreven wat je niet beoordeeld wilt hebben, kruis het dan door. Gebruik alleen de voorkant van de vellen.
- Geef je antwoorden zo beknopt mogelijk: gebruik waar mogelijk vergelijkingen, logische operatoren en schetsen om je redeneringen te illustreren. Vermijd lange zinnen.
- Geef getallen in een gepast aantal significante (beduidende) cijfers.
- Vaak kun je latere delen van een probleem oplossen zonder de eerdere te hebben opgelost.
- Je krijgt een lijst met constanten op een aparte pagina.

Je mag je werkplek zonder toestemming niet verlaten. Als je hulp nodig hebt (flesje vullen, kapotte rekenmachine, toiletbezoek, etc.), vraag dan de aandacht van een surveillant door één van de drie vlaggetjes in de lucht te houden ("Refill my water bottle, please", "I need to go to the toilet, please", of "I need help, please" in alle andere gevallen).

Aan het eind van de toets

- Aan het eind van de toets moet je onmiddellijk stoppen met schrijven.
- Leg voor elk probleem de bijbehorende vellen in de volgende volgorde: opgavevellen, antwoordvellen, werkvellen en kladpapier.
- Voeg alle vellen behorend bij één probleem in dezelfde envelop. Doe ook de algemene instructies in de overgebleven losse envelop. Zorg ervoor dat je studentcode op elke envelop staat. Lever ook alle

Theory

Dutch Speaking Countries

TG

lege vellen in. Je mag geen vellen of papier mee naar buiten nemen.

- Laat de rekenmachine die je gekregen hebt van de organisatie op tafel liggen.

Donkere materie

De eerste formele aanwijzingen voor het bestaan van donkere materie werden geleverd door Fritz Zwicky waarbij hij zich baseerde op waarnemingen van de dynamica van het Coma sterrenstelselcluster, bestaande uit ongeveer duizend sterrenstelsels (galaxies).

Zwicky maakte gebruik van het Virial theorema om een schatting te maken van de massa van het sterrenstelselcluster. In een simpel zon-planeetsysteem, waarin de planeet draait rond de zon in een cirkelvormige baan, is het gevolg van het Virial theorema dat de kinetische energie van een planeet rechtstreeks gelinkt is aan zijn gravitatie potentiële energie.

In het algemene geval, voor een systeem bestaande uit vele deeltjes die gebonden zijn door krachten, geeft het theorema daarentegen een verband tussen de tijdsgemiddelde totale kinetische energie en de tijdsgemiddelde totale potentiële energie.

Gebaseerd op zijn waarnemingen van de snelheden van sterrenstelsels op de rand van de Coma cluster, kwam Zwicky in 1933 tot de vaststelling dat de massa van de cluster groter moest zijn dan de massa, die visueel kon worden waargenomen (dat waren de sterrenstelsels). De gravitationele aantrekking uitgeoefend door de waarneembare materie (de sterrenstelsels) was immers te gering om de snelheid van de sterrenstelsels te veroorzaken. Er moeten dus verborgen massa's zijn die bijdragen tot de hoge snelheden. Deze verborgen massa is de massa van de donkere materie.

Ga er, voor wat volgt, van uit dat de massa van elk sterrenstelsel de som is van zijn zichtbare massa en de donkere materie, die zich samen met het sterrenstelsel verplaatst. Veronderstel eveneens dat donkere materie en zichtbare materie alleen gravitationeel met elkaar in interactie zijn.

A. Sterrenstelselcluster

Beschouw een sterrenstelselcluster dat bestaat uit een groot aantal N sterrenstelsels met donkere materie die homogeen verdeeld zijn over een bol met straal R waarbij de totale massa (van de sterrenstelsels en de donkere materie) van het cluster gelijk is aan M . Veronderstel dat de gemiddelde totale massa (zichtbaar en donkere materie) van een sterrenstelsel een waarde m heeft.

A.1	Zoek een uitdrukking voor de totale gravitatie potentiële energie van het cluster, als functie van M en R , uitgaande van een continue verdeling van de massa over het cluster.	1.0 pt.
-----	---	---------

Als gevolg van de expansie van het heelal, zal een object op grote afstand zich van een waarnemer op aarde verwijderen met een snelheid die afhangt van de afstand tussen de waarnemer en het object. Een bepaalde Lyman (een spectraallijn van waterstof) frequentie afkomstig van een type IA supernova in sterrenstelsel i van het cluster, zal worden waargenomen als f_i , met $i = 1, \dots, N$, terwijl de corresponderende Lymanfrequentie op aarde gelijk is aan f_0 .

A.2	Bepaal de gemiddelde snelheid V_{cr} van de hele sterrenstelselcluster wanneer deze zich van de aarde verwijdt als functie van f_i (met $i = 1, \dots, N$), f_0 en N . Merk daarbij op dat de snelheid van een sterrenstelsel zeer klein is in vergelijking met de lichtsnelheid c .	0.5 pt.
A.3	Neem aan dat de snelheden van sterrenstelsels ten opzichte van het centrum van het cluster isotroop zijn (gelijk in alle richtingen), bepaal de Root Mean Square (RMS) snelheid v_{rms} van de stelsels t.o.v. het centrum van het cluster als functie van N, f_i (met $i = 1, \dots, N$) en f_0 . Gebruik dit resultaat om de gemiddelde kinetische energie van een sterrenstelsel t.o.v. het centrum van het cluster te bepalen als functie van v_{rms} en m .	1.5 pt.

Om de totale massa van het cluster te vinden kan gebruik gemaakt worden van het Virial theorema. Dit theorema stelt dat voor een systeem bestaande uit deeltjes, die door hun conservatieve kracht aan elkaar gebonden zijn, geldt:

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

waarbij $\langle K \rangle_t$ de tijdsgemiddelde totale kinetische energie is, $\langle U \rangle_t$ de tijdsgemiddelde totale potentiële energie, en γ een constante.

Dit theorema kan afgeleid worden door aan te nemen dat voor een systeem dat begrensd is door de eigen interactie van de deeltjes, de groottes van de positie en impuls (momentum) voor elk deeltje eindig zijn, waardoor volgende grootheid

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

eveneens eindig is.

A.4	Bepaal de waarde voor γ uit het net genoemde Virial theorema voor het geval van de gravitationele interactie, door gebruik te maken van het feit dat het tijdsgemiddelde $\frac{d\Gamma}{dt}$ over een lang tijdsinterval verdwijnt, m.a.w. $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$. (Tip: Probeer het probleem op te lossen door de som te nemen voor een beperkt aantal sterrenstelsels).	1.7 pt.
A.5	Maak gebruik van de vorige resultaten om de totale massa van de donkere materie	0.5 pt.

in het cluster te bepalen als functie van N , m_g , R en v_{rms} , waarbij m_g de gemiddelde totale zichtbare massa van een sterrenstelsel is. Merk op dat de RMS snelheid van de donkere materie dezelfde is als deze van de sterrenstelsels.
--

B. Donkere materie in een sterrenstelsel

Donkere materie komt ook voor binnen en rond een sterrenstelsel. Beschouw een bolvormig sterrenstelsel met zichtbare randhorizon R_g (een grenswaarde waarop een groot aantal sterren nog zichtbaar zijn, hoewel het mogelijk is dat een zeer klein aantal sterren nog verspreid kan zijn in een gebied verder dan deze grenswaarde R_g).

Benader de sterren in het sterrenstelsel als puntmassa's met een gemiddelde massa m_s . De sterren in het stelsel, homogeen verdeeld met een sterrendichtheid (number density) n , worden verondersteld te bewegen in cirkelvormige banen.

B.1	Vind, in de veronderstelling dat het sterrenstelsel enkel uit sterren bestaat, de snelheid van een ster als functie van zijn afstand tot het centrum van het sterrenstelsel en schets $v(r)$ voor $r < R_g$ en $r \geq R_g$.	0.8 pt.
-----	---	---------

Het bestaan van donkere materie kan afgeleid worden uit de rotatiecurve van een sterrenstelsel, welke een grafiek is van $v(r)$, verkregen uit experimentele observaties.

De figuur hieronder toont een typisch voorbeeld van zo'n rotatiecurve van een sterrenstelsel. Om de zaken te vereenvoudigen mag je aannemen dat $v(r)$ een lineaire functie is voor $r \leq R_g$ en een constante waarde v_0 aanneemt wanneer $r > R_g$.

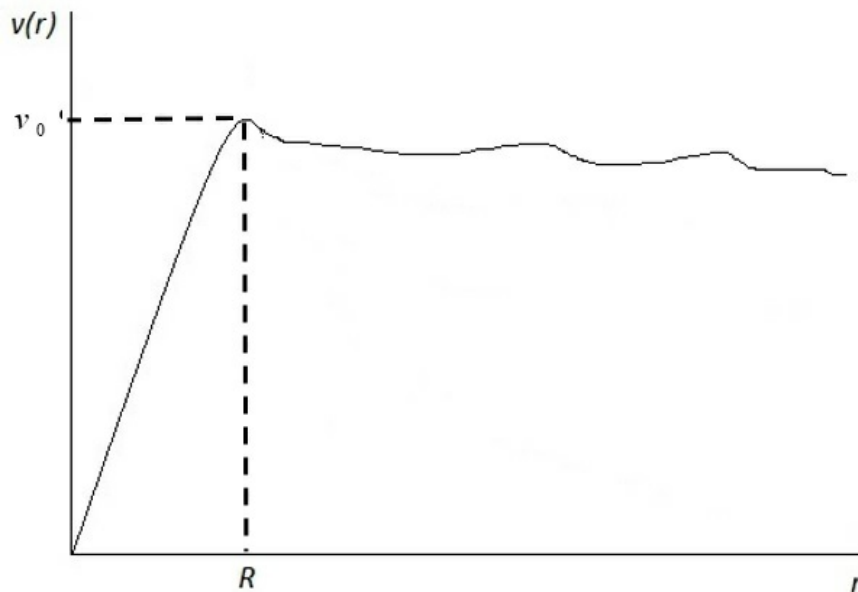


Fig. 1 Grafiek van een rotatiecurve van een sterrenstelsel.

B.2	Bepaal de totale massa m_R van het gedeelte van het sterrenstelsel gelegen binnen de bol met straal R_g als functie van v_0 en R_g .	0.5 pt.
-----	--	---------

Het verschil tussen de figuur getoond in B.2 en de grafiek geschetst in B.1 is een aanwijzing voor het bestaan van donkere materie.

B.3	Bepaal de massadichtheid van de donkere materie als functie van r , R_g , v_0 , n , en m_s voor $r < R_g$ en $r \geq R_g$.	1.5 pt.
-----	---	---------

C. Interstellair gas en donkere materie

Beschouw vervolgens een jong sterrenstelsel dat voor het overgrote deel bestaat uit interstellair gas en donkere materie (we verwaarlozen de massa van de sterren). We veronderstellen dat het interstellair gas bestaat uit identieke deeltjes, elk met een massa m_p . The deeltjesdichtheid (aantal deeltjes per volume) $n(r)$ en temperatuur $T(r)$ van het gas hangen af van de afstand r tot het centrum van het sterrenstelsel. Hoewel er vele fysische processen gaande zijn in het gas, kunnen we er van uit gaan dat het gas in hydrostatisch evenwicht is ten gevolge van zijn druk en de gravitationele aantrekking van het sterrenstelsel.

C.1	Bepaal de drukgradiënt van het gas dP/dr als functie van $m'(r)$, r en $n(r)$. Hierbij is $m'(r)$ de totale massa van gas en donkere materie binnen een bol met straal r gemeten vanuit het centrum van het sterrenstelsel.	0.5 pt.
-----	---	---------

Theory

Dutch Speaking Countries

T1

C.2	Beschouw het interstellair gas als ideaal, bepaal $m'(r)$ als functie van $n(r)$, $T(r)$ en hun afgeleiden naar r .	0.5 pt.
-----	--	---------

Ga er vervolgens ter vereenvoudiging van uit dat het gas bij temperatuur T_0 een isothermische verdeling vertoont en de deeltjesdichtheid van het interstellaire gas gegeven wordt door

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

waarbij α en β niet nader gedefinieerde constante waardes zijn.

C.3	bepaal de massadichtheid van de donkere materie als functie van r binnen het sterrenstelsel.	1.0 pt.
-----	--	---------

Student Code						
---------------------	--	--	--	--	--	--

A. Sterrenstelselcluster

Vraag	Antwoord	Marks
A.1 (1.0 pt.)	$U =$	
A.2 (0.5 pt.)	$V_{rc} =$	
A.3 (1.5 pt.)	$K_{ave} =$ $v_{rms} =$	
A.4 (1.7 pt.)	$\gamma =$	
A.5 (0.5 pt.)	$M_{dm} =$	

B. Donkere materie in een sterrenstelsel

Vraag	Antwoord	Marks
<p>B.1</p> <p>(0.8 pt.)</p>	<p>Voor $r < R_g$:</p> <p>$v(r) =$</p> <p>Voor $r \geq R_g$:</p> <p>$v(r) =$</p> <p>Schets $v(r)$ for $r < R_g$ and $r \geq R_g$:</p>	

--	--	--	--

B.2 (0.5 pt.)	$m_R = m'(R_g) =$	
B.3 (1.5 pt.)	<p>Voor $r < R_g$:</p> <p>$\rho(r) =$</p> <p>Voor $r \geq R_g$:</p> <p>$\rho(r) =$</p>	

C. Interstellair gas en donkere materie

Vraag	Antwoord	Marks
C.1 (0.5 pt.)	$\frac{dP}{dr} =$	
C.2 (0.5 pt.)	$m'(r) =$	
C.3 (1.0 pt.)	$\rho_{dm}(r) =$	

----- HIERONDER NIETS NOTEREN -----

DEEL	SCORE
A	
B	
C	
TOTAAL	

Aardbeving, Vulkaan en Tsunami

Indonesië is de supermarkt van natuurrampen. Nagenoeg alle mogelijke soorten natuurrampen hebben plaatsgevonden in Indonesië, zoals vulkaanuitbarstingen (erupties), aardbevingen en tsunami's.

A. Eruptie van de Merapi Vulkaan



(Fig. 1: Pyroclastische wolk tijdens de eruptie van de Merapi, foto gemaakt door Volcanological Office of Yogyakarta, BPPTKG)

De Merapi vulkaan is één van de meest actieve vulkanen op Java. Pyroclastische stromingen zijn bekende eruptie karakteristieken van een vulkaan. De pyroclastische stroming is een heet mengsel van gas en steen die de vulkaan uitstroomt. Op 26 oktober 2010 heeft Merapi zijn explosieve karakter getoond door een aswolk te produceren die een hoogte van 12 km bereikte (Fig.1) en pyroclastische stromen te produceren die ervoor zorgden dat 20.000 mensen rondom de vulkaan moesten worden verplaatst.

We bekijken de oorzaken die hebben geleid tot de grootste eruptie van Merapi in 2010. Het is bekend bij geologen dat de invloed van het externe water in de magma een belangrijke rol speelt bij het explosieve karakter van vulkanische erupties (hydro magmatische erupties). Laten wij aannemen dat we de vulkaan kunnen beschouwen als een systeem dat bestaat uit magmadeeltjes en water. De kraters van de vulkaan en de atmosfeer vormen de grenzen van dit systeem. De explosieve eruptie vindt plaats in twee stappen, een zeer snelle magma-water interactie (1), gevolgd door een systeemexpansie (2). Tijdens de eerste stap mengt een hoeveelheid magma, met massa m_m en absolute temperatuur T_m , met een hoeveelheid water, met massa m_w en absolute temperatuur T_w . Het thermisch evenwicht wordt vrijwel meteen bereikt. Deze interactie kan beschouwd worden als een proces met nagenoeg constant volume. De verdampingswarmte van water en de smeltwarmte van magma kunnen worden verwaarloosd.

A.1	Bepaal de temperatuur bij thermisch evenwicht tijdens de eerste stap als functie van de massa's en de soortelijke warmte van water c_{Vw} en magma c_{Vm} .	0.5 pt.
A.2	Bepaal de druk bij thermisch evenwicht tijdens de eerste stap. Neem hierbij aan dat het mengsel als ideaal gas beschouwd kan worden en neem aan dat het volume per mol gelijk is aan v_e .	0.3 pt.

De expansie van het systeem (de tweede stap) kan plaatsvinden door verschillende mogelijkheden, waarvan thermische detonatie er één is. Hoewel een dergelijk proces vrij gecompliceerd is, kunnen wij empirisch de relatieve snelheid van het uitgestoten mengsel meten. De snelheid van het gas gedurende de eruptie hangt af van de druk p , de totale massa m en het volume V van het mengsel in de krater van een vulkaan.

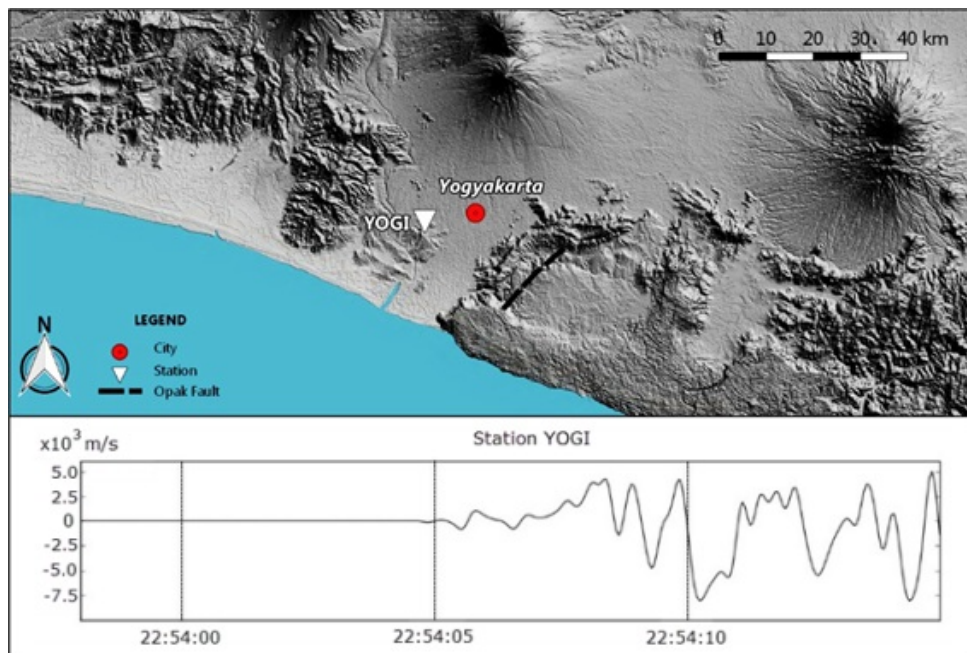
A.3	Druk de snelheid van het mengsel tijdens de eruptie uit als functie van p , m , en V , waarin je een evenredigheidsconstante κ mag laten staan.	0.5 pt.
-----	--	---------

De gemeten druk is ongeveer in de orde van 100 MPa. Dit maakt dat de (relatieve) snelheid van de eruptie ballistische waarden kan aannemen.

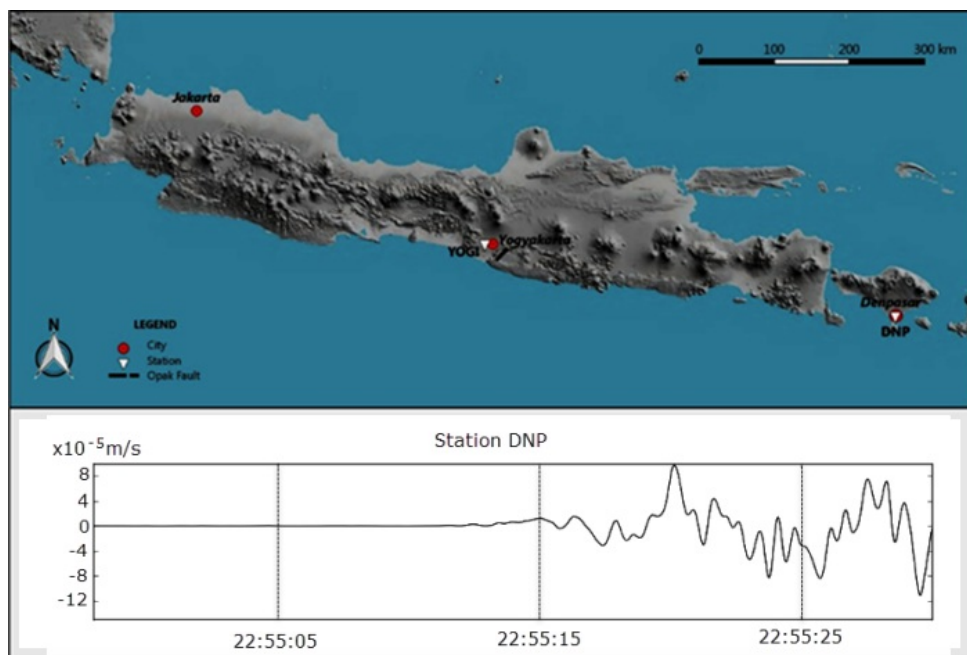
B. De aardbeving in Yogyakarta

De aardbeving in Yogyakarta uit 2006 met een magnitude van $M_w = 6.4$, die veel schade heeft aangericht aan gebouwen in Bantul en Yogyakarta, vond plaats om 05:54:00.00 lokale tijd of 22:54:00.00 UTC. De oorzaak van deze aardbeving was een plotselinge verschuiving van het Opak segment (zie Fig. 2). Het hypocentrum lag op 15 km onder het oppervlak.

De seismische golf die zich door de aardkorst voortplant, kan geregistreerd worden met behulp van een seismometer. Het diagram van een seismometer wordt seismogram genoemd (Fig. 2 en 3, onderste grafiek). Het seismogram geeft de verticale bodemsnelheid weer als functie van de geregistreerde tijd door het seismisch station in Gamping Station Yogyakarta (YOGI) (Fig. 2) en Denpasar, Bali (DNP) (Fig. 3). In het algemeen bestaan seismische golven uit drie types golven: de longitudinale of primaire golf (P -golf), de transversale of secundaire golf (S -golf) en de oppervlaktegolf. De P -golf en de S -golf planten zich voort onder het aardoppervlak, terwijl de oppervlaktegolven zich langs het aardoppervlak voortplanten. Seismische golven die zich voortplanten onder het aardoppervlak naar de stations kunnen opgedeeld worden in golven die zich volgens een rechte lijn voortplanten, golven die worden gereflecteerd door een grenslaag en golven die gebroken worden in de volgende laag. De longitudinale of primaire golf heeft de hoogste snelheid, terwijl de oppervlaktegolf de laagste snelheid heeft, ongeveer 60% van de P -golf.



(Fig. 2: De locatie van YOGI op de kaart)



(Fig. 3: De locatie van DNP (Denpasar) op de kaart)

De afstand tussen het epicentrum (de projectie van het hypocentrum op het aardoppervlak) en de YOGI en DNP stations bedraagt respectievelijk 22,5 km en 500 km. De diepte van de aardkorstlaag in Java, Indonesië, is 30 km. Onder de aardkorstlaag bevindt zich de aardmantel. Net als andere golfverschijnselen, voldoen seismische golven ook aan de brekingswet van Snellius. De seismische golf kan ook worden gereflecteerd door de mantellaag. In dit probleem verwaarlozen wij de kromming van de aarde.

B.1	Fig. 2 toont het seismogram van het YOGI station. Gebruik de gegevens om de snelheid van de P -golf in de aardkorst te bepalen.	0.5 pt.
B.2	Bepaal de voortplantingstijd van respectievelijk de directe P -golf en de gereflecteerde golf als gevolg van de aardbeving in Yogyakarta die zijn aangekomen bij het DNP station in Denpasar.	0.6 pt.

Door aan te nemen dat de aarde is opgebouwd uit slechts twee lagen, nl. de korst en de mantel, kunnen we stellen dat de primaire golf in de korst en in de mantel er zich met verschillende maar constante snelheden in voortplanten. De snelheid in de mantel is groter dan in de korst. Merk op dat de P -golf die met de grenshoek de mantel in gebroken wordt, dus na breking onder een rechte hoek met de normaal (90°), gedeeltelijk de korst in wordt teruggebroken gedurende zijn hele voortplantingspad langs het korst-mantel grensvlak.

B.3	Bepaal de snelheid van de P -golf in de mantel.	1.2 pt.
-----	---	---------

Voor een meer realistisch model van de aarde, kunnen wij de korst opdelen in een aantal dunne lagen, zodat de snelheid van de seismische golf een functie is van de diepte z , gegeven door $v(z) = v_0 + az$, waarbij a een constante is en het hypocentrum is bij benadering op het oppervlak. In dit model is de golfstraal gekromd.

B.4	Wij definiëren de golfparameter als $p = \sin \theta(z)/v(z)$, waarbij $\theta(z)$ de hoek is tussen de straal en de normaal. Stel dat er een seismische golf aankomt bij het station met golfparameter p ; zoek een uitdrukking voor de afstand tot het epicentrum als functie van p , v_0 en a . Neem aan dat het hypocentrum heel dicht bij het grondoppervlak gelegen is.	1.4 pt.
-----	--	---------

B.5	Bepaal de voortplantingstijd T vanaf het epicentrum naar een willekeurig station, in de vorm van een integraal over z .	1.0 pt.
-----	---	---------

De aarde bestaat uit een opstapeling van homogene lagen, waarbij de snelheid in elke laag gelijk is aan v_i en de dikte van elke laag δz_i is.

B.6	Gebruik het resultaat uit het voorgaande probleem, en benader de propagatietijd (T) vanaf het epicentrum naar het DNP station door aan te nemen dat de korst bestaat uit slechts drie discrete lagen ($i = 1, 2, 3$), met de volgende karakteristieke waarden: $v_1 = 6.65$ km/sec, $v_2 = 6.97$ km/sec, $v_3 = 6.99$ km/sec, $p = 0.143$ sec/km, $\delta z_1 = 6.0$ km, $\delta z_2 = 9.0$ km, $\delta z_3 = 15$ km.	1.0 pt.
-----	---	---------

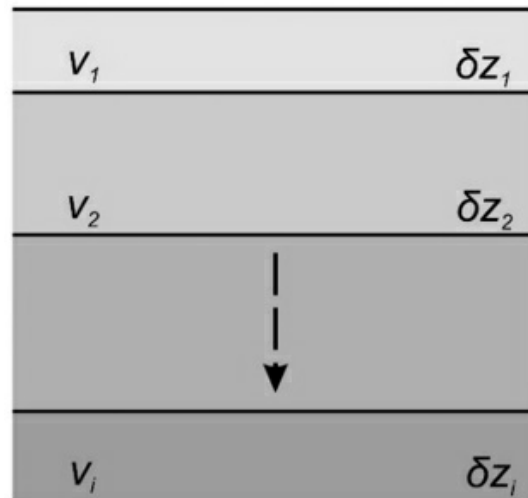


Fig. 4: Een vereenvoudigd model voor de lagen van de aarde.

C. Java Tsunami

In 2006 vond in Pangandaran een aardbeving en tsunami plaats op 17 juli om 15:19:27 lokale tijd, voor de kust van west en centraal Java. Tijdens de aardbeving, waarbij de breuklijn van het epicentrum op de oceaانبodem ligt, kan deze breuklijn verschuiven en een enorme watergolf veroorzaken die wij tsunami noemen. Met andere woorden, een tsunami is een golf in ondiep water die wordt geïnitieerd door een verstoring met een kleine amplitude maar met een enorm grote golflengte. Beschouw een plotselinge verstoring die ervoor zorgt dat de oceaانبodem wordt opgetild, zoals te zien is in Fig. 5. Neem aan dat de energie van de aardbeving omgezet wordt in de potentiële energie van de gestegen watermassa. In een simpel model beschouwen wij de verhoogde watermassa als een balk (box) met een grondoppervlak gelijk aan $\lambda L/2$ (waarbij $L \gg \lambda$) en een hoogte h .

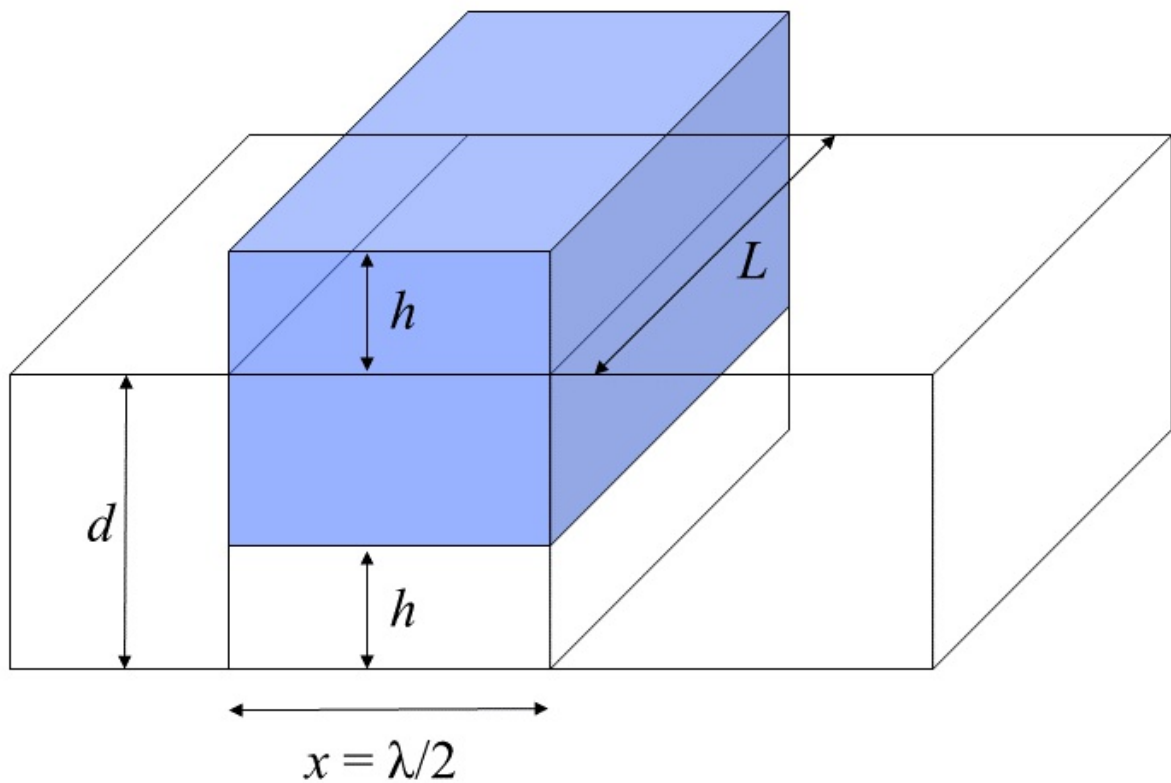


Fig. 5: Illustratie van de tsunami in een oceaan met diepte d .

C.1	Bepaal de potentiële energie die is opgeslagen in het omhooggeheven water ten gevolge van de aardbeving. Neem aan dat de dichtheid van het zeewater gelijk is aan ρ .	0.5 pt.
C.2	Bepaal een uitdrukking voor de snelheid van de tsunami, waarin je een dimensieloze factor mag laten staan.	1.2 pt.
C.3	Gebruik een energieschouwing, en bepaal de amplitude van de tsunamigolf als functie van de diepte, waarbij je mag aannemen dat de diepte langzaam varieert en ook dat op een diepte d_0 de amplitude gelijk is aan A_0 .	1.3 pt.

Student Code						
--------------	--	--	--	--	--	--

Aardbeving, Vulkaan en Tsunami**A. Eruptie van de Merapi Vulkaan**

Vraag	Antwoord	Marks
A.1 (0.5 pt.)	$T_e =$	
A.2 (0.3 pt.)	$p_e =$	
A.3 (0.5 pt.)	$v_g =$	

B. De aardbeving in Yogyakarta

Vraag	Antwoord	Marks
B.1 (0.5 pt.)	$v_p =$	
B.2 (0.6 pt.)	$t_{direct} =$ $t_{reflected} =$	
B.3 (1.2 pt.)	$v_m =$	
B.4 (1.4 pt.)	$X =$	
B.5 (1.0 pt.)	$T =$	
B.6 (1.0 pt.)	$T(p) =$	

C. Java Tsunami

Vraag	Antwoord	Marks
C.1 (0.5 pt.)	$E_p =$	
C.2 (1.2 pt.)	$v =$	
C.3 (1.3 pt.)	$A =$	

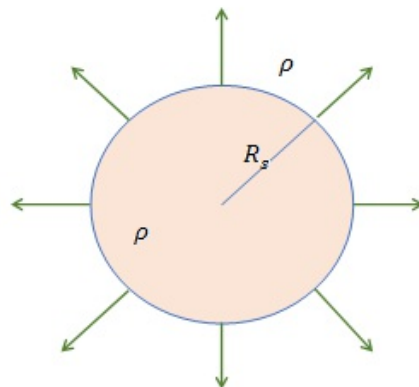
----- HIERONDER NIETS NOTEREN!-----

Deel	SCORE
Deel A	
Deel B	
Deel C	
TOTAAL	

Kosmische Inflatie

Omdat sterrenstelsels (galaxies) ten opzichte van de aarde bewegen, verschillen de golflengtes van zichtbaar licht van een bepaald sterrenstelsel van de oorspronkelijke golflengtes. Dit effect is bekend als het elektromagnetische Dopplereffect. Je zou verwachten dat bij een verzameling sterrenstelsels, de verschuivingen van de golflengtes willekeurig verdeeld zijn, met soms een positieve (rood) verschuiving en soms een negatieve (blauw) verschuiving. Observaties tonen echter dat alle sterrenstelsels een roodverschuiving vertonen, op een paar dichtbij gelegen sterrenstelsels na. Dit is ook zo als we de observaties op een andere plaats in het heelal zouden doen. We moeten hieruit concluderen dat het heelal uitdijt. Verder kunnen lokale onregelmatigheden op een schaal groter dan 100 Mpc (1 pc = 3.26 lichtjaren), verwaarloosd worden. Gemiddeld over grote schalen, wordt de samenklontering steeds meer isotroop (onafhankelijk van richting) en homogeen (onafhankelijk van de plaats). We mogen daarom aannemen dat het heelal bestaat uit materie met een uniforme (massa)dichtheid ρ en dat het uitdijt.

A. Expansie van het universum



Als eenvoudig model van ons universum, beschouwen we een expanderende bol met een uniforme dichtheid, binnen een veel grotere bol met dezelfde dichtheid. Stel dat de straal van de kleinere bol op een bepaald tijdstip gelijk is aan R_s . Om de expansie van deze bol te beschrijven, kan de tijdsafhankelijke straal $R(t)$ uitgedrukt worden door middel van een schaalfactor $a(t)$, zodat $R(t) = a(t)R_s$.

Gebruik makend van Newton's zwaartekrachtswet om de snelheid van een massa element op het bolvormig grensvlak te bepalen volgens het model van ons universum, kun jij twee zogenaamde Friedmann vergelijkingen zelf afleiden:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

waarbij k een dimensieloze constante is, en c de lichtsnelheid.

A.1	Bepaal de constante A_1 uit vergelijking (1)	1.3 pt.
-----	--	---------

Tot dusver is de discussie niet-relativistisch. In werkelijkheid, kan het systeem uitgebreid worden naar een relativistisch systeem waarbij $\rho(t)c^2$ gezien kan worden als de totale energiedichtheid (exclusief de gravitationele potentiële energie). In dit relativistisch systeem luidt de tweede Friedmann vergelijking als volgt:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

gebruik makend van de eerste wet van de thermodynamica voor een adiabatisch systeem, waarbij c en p respectievelijk de lichtsnelheid en de druk op de bol zijn.

A.2	Bepaal de constante A_2 uit vergelijking (2).	0.9 pt.
-----	---	---------

Om vgl. (1) en (2) op te kunnen lossen, moet je een relatie $p = p(\rho)$ veronderstellen, zoals $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, waarin w een constante is. Er bestaat ook een factor $H = \dot{a}/a$ die we de Hubble parameter noemen. De huidige waarden van parameters worden vaak weergegeven met een subscript 0 zoals t_0, ρ_0, H_0, a_0 enzovoorts. Voor de eenvoud nemen we $a_0 = 1$.

Er wordt gedacht dat het universum begonnen is met een grote explosie die we de Big-Bang noemen, waarbij straling van relativistische deeltjes wordt geproduceerd. Tijdens zijn expansie koelt het universum af en worden de deeltjes erin niet-relativistisch. Echter, recente observaties maken duidelijk dat er in het huidige universum voornamelijk een kosmologische constante energiedichtheid is. In het geval van het foton neemt, terwijl het universum expandeert, de golflengte ervan evenredig met de schaalfactor toe.

A.3	Bepaal voor elk van volgende drie gevallen de resulterende waarde van w : (i) een universum gevuld met alleen straling (ook wel fotonenergie genoemd), (ii) een universum gevuld met alleen niet-relativistische materie en (iii) een universum met een constante energiedichtheid.	1.2 pt.
-----	--	---------

	In het geval dat $k = 0$, bepaal dan $a(t)$ voor de gevallen (i) tot (iii), zoals genoemd in	
--	---	--

A.4	A.3. Gebruik de beginvoorwaarden $a(t=0) = 0$ voor de gevallen (i) and (ii), en gebruik de conditie $a_0 = 1$ voor geval (iii).	1.2 pt.
-----	---	---------

De constante k in vgl. (1) verwijst naar de classificatie van de ruimtelijke geometrie van het universum. De waarde kan zijn: $k = +1$ voor een universum met positieve kromming (gesloten), $k = 0$ voor een vlak universum (oneindig) en $k = -1$ voor een universum met negatieve kromming (open en oneindig). We definiëren een dichtheidsverhouding $\Omega = \rho/\rho_c$, waarin $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ de *kritische energiedichtheid* is. Merk op dat A_1 is bepaald in opdracht A.1.

A.5	Druk k in vgl.(1) uit als functie van Ω, H, a , en R_0 .	0.1 pt.
A.5	Bepaal steeds een interval voor Ω dat correspondeert met respectievelijk de waarde van $k = +1, k = 0$ en $k = -1$.	0.3 pt.

B. Motivatie om de inflatiefase en zijn algemene voorwaarden te introduceren

De observatie van kosmische microgolfachtergrondstraling (CMB) suggereert dat ons huidige universum vlak is. Als dit waar is, is het probleem dat het huidige universum gestart moet zijn van een volledig vlak universum. Anders zou elke afwijking van de vlakheid uiteindelijk met de tijd gegroeid zijn waardoor de huidige vlakheid onmogelijk zou zijn.

B.1	Zoek $(\Omega(t) - 1)$ als een functie van de tijd voor het universum in een ofwel door straling gedomineerd, ofwel door materie gedomineerd stadium (zie deel A.3).	0.5 pt.
-----	--	---------

Om het probleem op te lossen moet het universum aan het begin van zijn geschiedenis een periode hebben doorlopen, gedomineerd door een constante energiedichtheid, wat leidt tot een exponentiële expansie die een periode van inflatie genoemd wordt.

B.2	Zoek voor deze periode die gedomineerd is door een constante energiedichtheid $(\Omega(t) - 1)$ als functie van de tijd. Neem aan dat $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0.3 pt.
B.3	Toon aan dat de voorwaarde voor inflatie de volgende voorwaarden impliceert: negatieve druk, versnelde expansie ($\ddot{a} > 0$) en afnemende Hubblestraal ($d(aH)^{-1}/dt < 0$).	0.9 pt.

B.4	Toon aan dat de voorwaarde van een afnemende Hubblestraal uitgedrukt kan worden in de parameter $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ als $\epsilon < 1$.	0.2 pt.
-----	--	---------

Inflatie vindt plaats zolang $\epsilon < 1$ en eindigt wanneer $\epsilon = 1$. We kunnen het e-folding nummer N definiëren, zodanig dat $dN = d \ln a = H dt$ en $N = 0$ aan het eind van de inflatie.

C. Inflatie door homogeen verdeelde deeltjes

Als voorbeeld van een eenvoudig fysisch systeem dat een periode van inflatie kan doormaken nemen we een universum dat bestaat uit homogeen verdeelde materie. De inflatie kun je beschrijven met een functie $\phi(t)$.

De dynamische vergelijking van de materie wordt gegeven als

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

waarbij $V = V(\phi)$ een potentiaalfunctie is en $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. De Hubble parameter voldoet aan

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (4)$$

met M_{pl} een constante die de gereduceerde Planck massa wordt genoemd.

De inflatiefase komt voor wanneer de potentiële energie V de kinetische energie $\dot{\phi}^2/2$ voldoende lang domineert zodat de term $\ddot{\phi}$ in vergelijking (3) verwaarloosd kan worden. Deze voorwaarde wordt de 'slow-roll benadering' genoemd.

De grootheden ϵ en $\eta_V = \delta + \epsilon$, met $\delta = -\ddot{\phi}/H(\dot{\phi})$, worden 'slow-roll' parameters genoemd.

C.1	Benader parameter ϵ , parameter η_V en $dN/d\phi$ als functie van de potentiaal $V(\phi)$ en zijn eerste en tweede afgeleide (V' en V'').	1.7 pt.
-----	---	---------

D. Inflatie met een eenvoudige potentiaal

Voorspellingen van elk model voor inflatie moeten vergeleken worden met beperkingen vanuit observaties van CMB zoals: $n_s = 0.968 \pm 0.006$ en $r < 0.12$, waarbij $r = 16\epsilon$ en $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ zijn bepaald bij $\phi = \phi_{start}$ voor het inflatiemodel dat de overheersende deeltjes gebruikt. Neem aan dat de potentiaal een eenvoudige vorm $V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ aanneemt met n een willekeurig geheel positief getal en Λ een constante.

D.1	Bereken ϕ_{end} aan het eind van de inflatie.	0.5 pt.
D.2	Druk r en n_s uit als functie van het e-folding nummer N en geheel positief getal n . Benader de waarde van n die het dichtst bij geobserveerde waarden van r en n_s komt. Neem $N = 60$ in je berekeningen.	0.9 pt.

Student Code						
---------------------	--	--	--	--	--	--

A. Expansie van het universum

Vraag	Antwoord	Marks
A.1 (1.3 pt.)	$A_1 =$	
A.2 (0.9 pt.)	$A_2 =$	
A.3 (1.2 pt.)	(i) $w_r =$ (ii) $w_m =$ (iii) $w_\Lambda =$	

A. Expansie van het universum

Vraag	Antwoord	Marks
<p>A.4</p> <p>(1.2 pt.)</p>	<p>(i) $a(t) =$</p> <p>(ii) $a(t) =$</p> <p>(iii) $a(t) =$</p>	
<p>A.5</p> <p>(0.1 pt.)</p>		
<p>A.6</p> <p>(0.3 pt.)</p>		

B. Motivatie om de inflatiefase en zijn algemene voorwaarden te introduceren

Vraag	Antwoord	Marks
B.1 (0.5 pt.)	$(\Omega - 1) =$	
B.2 (0.3 pt.)	$(\Omega - 1) =$	
B.3 (0.9 pt.)		
B.4 (0.2 pt.)		

C. Inflatie door homogeen verdeelde deeltjes

Vraag	Antwoord	Marks
<p>C.1</p> <p>(1.7 pt.)</p>	$\epsilon \approx$ $\eta_V \approx$ $\frac{dN}{d\phi} \approx$	

D. Expansie van deeltjes met een eenvoudige potentiaal

Vraag	Antwoord	Marks
<p>D.1</p> <p>(0.5 pt.)</p>	$\phi_{end} \approx$	
<p>D.2</p> <p>(0.9 pt.)</p>	$r =$ $n_s =$	