UITWERKINGEN VAN DE THEORIE TOETS

1.1. De druk in de cilinder is: $p = p_0 + \dfrac{mg}{\pi r^2} = 102{,}3\ \text{kPa}$. De hoogte van de cilinder is dan: $h_1 = \dfrac{V_1}{\pi r^2} = \dfrac{\frac{nRt_0}{p}}{\pi r^2} = \dfrac{nRT_0}{p_0\pi r^2 + mg}$. Na het bestralen wordt de hoogte $h_2 = h_1 + \Delta s$ en wordt de nieuwe temperatuur $T_2 = T_0(1 + \dfrac{\Delta s}{h_1}) = 322\ \text{K}$.

1.2. De totale mechanische arbeid is: $W = mg\Delta s + p_0\pi r^2\Delta s = 24{,}1\ \text{J}$

1.3. De totale geaborbeerde stralingsenergie is:

$$Q = \Delta U + W = n_V\frac{T_0\Delta s}{h_1} + W = \Delta s(p_0\pi r^2 + mg)(\frac{c_V}{R} + 1) = 84\ \text{J}$$

1.4. $P = \dfrac{Q}{\Delta t} = 8{,}4\ \text{W}$; het aantal fotonen is dan $\dfrac{W}{h\frac{c}{\lambda}} = 2{,}2.10^{19}/\text{s}$

1.5. Het rendement is $\eta = \dfrac{mg\Delta s}{Q} = 2{,}8.10^{-3} = 0{,}3\%$

1.6. Omdat er geen energie-uitwisseling met de omgeving is, is de verandering adiabatisch. Daarvoor geldt:

$$pV^\gamma = \textbf{constant} \text{ met } \gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V} = 1{,}399.$$

Uit $\dfrac{pV}{T} = \textbf{constant}$ volgt: $T_3 = T_2(\dfrac{p_0}{p})^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$. Daaruit volgt: $T_3 = 321$ K.

2.1. Het veld staat loodrecht op het vlak van tekening en gaat het vlak in.

2.2. Als $\alpha = \pi/2$ is krijgen we het veld van een rechte lijn: $B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi d}$. Voor deze waarde van is de $\tan(\alpha/2) = \tan(\pi/4) = 1$ zodat de factor $k = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi d}$.

2.3. Het veld in P^* kan gevonden worden door in $B(\alpha^*)$ de hoek α^* te vervangen door $\pi - \alpha$.

Dan wordt: $\tan(\dfrac{\alpha^*}{2}) = \tan(\dfrac{\pi - \alpha}{2}) = \tan(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}) = \text{ctan}(\dfrac{\alpha}{2}) = \dfrac{1}{\tan(\frac{\alpha}{2})}$

en volgt: $B(P^*) = \dfrac{k}{\tan(\frac{\alpha}{2})}$.

2.4. Er wordt een krachtmoment (koppel) geleverd $M = \mu . B . \sin\theta$ ten gevolge waarvan het magneetje, bij kleine uitwijkingen, begint te trillen met een periode:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

2.5. De verhouding van de perioden volgens Ampère en Biot-Savart is:

$\dfrac{T_A}{T_{BS}} = \sqrt{\dfrac{\frac{\alpha}{\pi}}{\frac{1}{2}\tan(\frac{\alpha}{2})}} = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{\pi\tan(\frac{\alpha}{2})}}$. Dit is een monotoon dalende functie. De grenswaarde volgt uit $T_A = 1{,}10\ T_{BS}$. Dit levert $\alpha < 0{,}77\ \mathrm{rad} \approx 44°$.

3.1. Uit $\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{GM_{zon}}{R^2}$ volgt: $v = \sqrt{\dfrac{GM_{zon}}{R}} \approx 1{,}31.10^4\ \mathrm{m/s}$.

3.2. Als ρ de afstand tot Jupiter is en M de massa van Jupiter, volgt bij evenwicht van krachten:

$\dfrac{GMm}{\rho^2} = \dfrac{GM_{zon}m}{(R-\rho)^2}$, zodat $\rho = \dfrac{\sqrt{M}}{\sqrt{M_{zon}} + \sqrt{M}}.R = 0{,}02997R = 2{,}33.10^{10}\ \mathrm{m}$.

3.3. Volgens de Galileo-transformatie geldt: $v'_x = V$ en $v'_y = v_0$. Daardoor heeft de snelheid van de sonde een richting die in het Jupiter-stelsel een hoek θ_0 maakt met de x-as. Voor deze hoek geldt: $\tan\theta_0 = \dfrac{v_0}{V}$. Hieruit volgt: $\theta_0 = 0{,}653\ \mathrm{rad} \approx 37{,}4°$. De grootte van de snelheid in het Jupiter-stelsel is: $v' = \sqrt{v_0^2 + V^2} = 1{,}65.10^4\ \mathrm{m/s}$.

3.4. De kinetische energie is: $E \approx \dfrac{1}{2}mv'^2 = 1{,}12.10^{11}\ \mathrm{J}$.

3.5. Op zeer grote afstand geldt $\dfrac{1}{r} \approx \dfrac{1}{\infty} \approx 0$ zodat $1 + \sqrt{1 + \dfrac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}\cos\theta = 0$

en $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^4b^2}{G^2M^2}}}$. Hieruit volgt de hoekverandering $\Delta\theta$ en

3.6. De dichtste nadering treedt op als $\theta = 0$. Dan volgt: $r_{min} = \dfrac{\dfrac{v'^2 b^2}{GM}}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{v'^4 b^2}{G^2 M^2}}}$.

Daaruit volgt voor de botsingsparameter:

$b = \sqrt{r_{min}^2 + \dfrac{2GM}{v'^2} r_{min}} = 4{,}90.10^8\ \mathrm{m} \approx 7{,}0 R_B$ Invullen in de uitdrukking voor de hoekverandering volgt hieruit: $\Delta\theta_{max} = 1{,}53\ \mathrm{rad} \approx 87{,}4^\circ$

3.7. In het Jupiter-stelsel zijn nu de snelheden na de passage:

$v_x = v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta)$ en $v_y = v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta)$

zodat dit in het zonnestelsel wordt:

$v''_x = v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta) - V$ en $v''_y = v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta)$.

3.8. De grootte van de snelheid in het zonnestelsel na de passage is dan: $v'' = \sqrt{v''^2_x + v''^2_y} = 2{,}62.10^4\ \mathrm{m/s}$.