

Twee problemen uit de Mechanica (10 punten)

Lees eerst de algemene instructies uit de aparte enveloppe voordat je begint met deze opgave.

Deel A. De verborgen schijf (3.5 punten)

We beschouwen een massieve houten cilinder met straal r_1 en dikte h_1 . Ergens in de houten cilinder is het hout vervangen door een metalen schijf met straal r_2 en dikte h_2 . De metalen schijf is zodanig geplaatst dat zijn symmetrie-as B evenwijdig is aan de symmetrie-as S van de houten cilinder. De metalen schijf is zo geplaatst dat de afstand tot de boven- en onderkant van de houten cilinder gelijk is. De afstand tussen S en B is d . De dichtheid van hout is ρ_1 en de dichtheid van metaal is $\rho_2 > \rho_1$. De totale massa van de houten cilinder met verborgen metalen schijf is samen gelijk aan M .

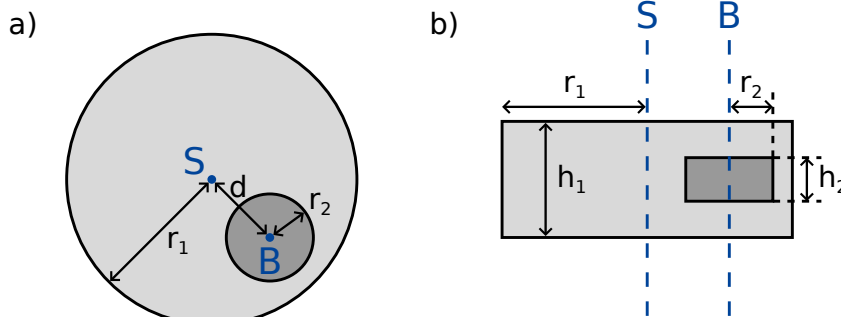
In dit probleem plaatsen we de houten cilinder op de grond zodat deze vrij naar links of rechts kan rollen. In figuur 1 is een zijaanzicht alsook een bovenaanzicht van het systeem gegeven.

Het doel van deze opdracht is om de afmetingen en de positie van de metalen schijf te bepalen.

Bij de volgende vragen mag je jouw antwoord uitdrukken in termen van de grootheden die bekend worden verondersteld:

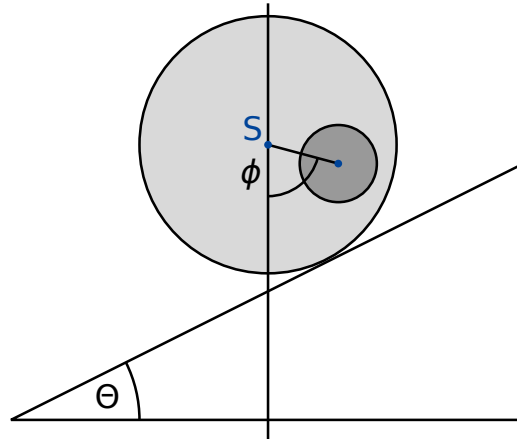
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Het doel is om r_2, h_2 en d indirect te bepalen.



Figuur 1: a) zijaanzicht b) bovenaanzicht

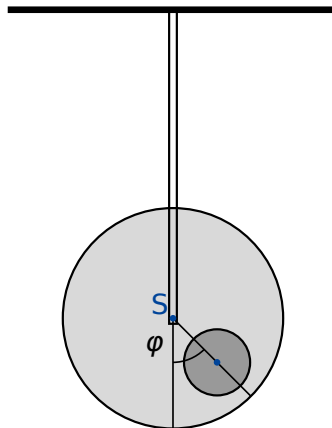
We definiëren b als de afstand tussen het massamiddelpunt C van het gehele systeem en de symmetrie-as S van de houten cilinder. Om deze afstand te bepalen, voeren we het volgende experiment uit: we plaatsen de houten cilinder op een horizontaal vlak zodanig dat het systeem in een stabiel evenwicht verkeert. Dit horizontaal vlak wordt voorzichtig aan één kant opgetild onder een hoek θ (zie figuur 2). Als gevolg van de statische wrijving kan de houten cilinder vrij rollen zonder te slippen. Deze zal een beetje naar beneden rollen op het hellend vlak, maar zal tot rust komen in een stabiel evenwicht nadat de cilinder over een hoek ϕ is geroteerd. Deze hoek ϕ wordt gemeten.



Figuur 2: Cilinder geplaatst op een hellend vlak.

- A.1** Geef een uitdrukking voor b als functie van de grootheden in (1), de rotatiehoek ϕ en de hellingshoek Θ . 0.8pt

Vanaf nu mag de waarde van b als bekend worden verondersteld.



Figuur 3: Opgehangen systeem.

Nu willen we het traagheidsmoment I_S van het systeem bepalen ten opzichte van de symmetrie-as S . Hiervoor hangen we de houten cilinder op zijn symmetrie-as aan een starre staaf. We draaien de cilinder over een kleine hoek φ vanuit zijn evenwichtspositie en laten deze vrij draaien. De opstelling is weergegeven in figuur 3. We vinden dat φ een periodieke beweging beschrijft met periode T .

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.2 | Geef de bewegingsvergelijking voor φ . Druk het traagheidsmoment I_S van het systeem (opgehangen cilinder uit figuur 3) om zijn symmetrie-as S uit als functie van T , b en de bekende grootheden uit (1). Je mag aannemen dat we de evenwichtspositie slechts met een kleine hoek verstoren zodanig dat φ altijd erg klein is. | 0.5pt |
|------------|---|-------|

Met de antwoorden uit **A.1** en **A.2**, willen we nu de geometrie en positie van de metalen schijf in de houten cilinder bepalen.

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.3 | Geef een uitdrukking voor de afstand d als functie van b en de grootheden uit (1). Je mag r_2 en h_2 als variabelen opnemen in je uitdrukking, omdat ze berekend worden in onderdeel A.5 . | 0.4pt |
|------------|---|-------|

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.4 | Geef een uitdrukking voor het traagheidsmoment I_S als functie van b en de grootheden uit (1). Je mag r_2 en h_2 als variabelen opnemen in je uitdrukking, omdat ze berekend worden in onderdeel A.5 . | 0.7pt |
|------------|---|-------|

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.5 | Gebruik alle bovenstaande resultaten om een uitdrukking te vinden voor h_2 en r_2 als functie van T , b en de bekende grootheden uit (1). Je mag h_2 uitdrukken als functie van r_2 . | 1.1pt |
|------------|---|-------|

Deel B. Roterend ruimtestation (6.5 punten)

Alice is een astronaut die woont op een ruimtestation. Het ruimtestation is een enorm groot wiel met straal R en roteert om zijn as, waardoor het de astronauten voorziet van kunstmatige gravitatie. De astronauten wonen aan de binnenzijde van de velg van het wiel. De aantrekkingskracht van het ruimtestation en de kromming van de vloer mogen verwaarloosd worden.

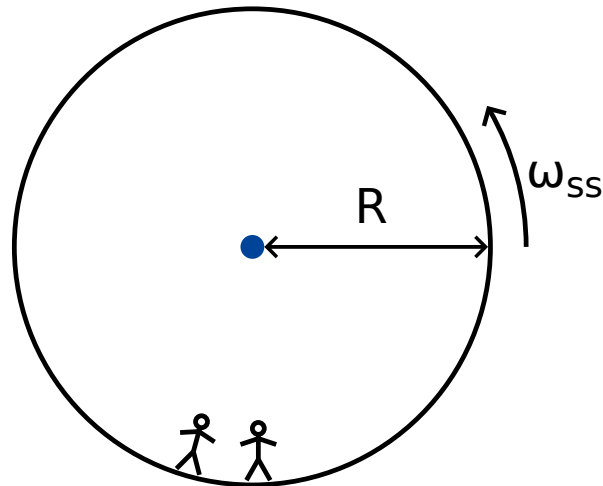
- | | | |
|------------|--|-------|
| B.1 | Bij welke hoeksnelheid ω_{ss} van het ruimtestation ervaren de astronauten dezelfde gravitatieversnelling g_E als op het aardoppervlak? | 0.5pt |
|------------|--|-------|

Alice en haar collega Bob hebben een meningsverschil. Bob gelooft niet dat ze wonen op een ruimtestation, maar beweert dat ze gewoon op de aarde wonen. Alice wil Bob met behulp van natuurkunde overtuigen dat ze wel op een roterend ruimtestation wonen. Hiervoor bevestigt ze een massa m aan een veer met veerconstante k en laat het geheel trillen. De massa trilt alleen in verticale richting en kan niet bewegen in de horizontale richting.

- | | | |
|------------|---|-------|
| B.2 | Aannemend dat op aarde de gravitatieversnelling constant en gelijk is aan g_E , wat is dan de hoekfrequentie ω_E die een persoon op aarde zou meten? | 0.2pt |
|------------|---|-------|

- | | | |
|------------|--|-------|
| B.3 | Welke hoekfrequentie ω meet Alice op het ruimtestation? | 0.6pt |
|------------|--|-------|

Alice is ervan overtuigd dat haar experiment bewijst dat ze wonen op een roterend ruimtestation. Bob blijft echter sceptisch. Hij beweert dat je hetzelfde effect krijgt indien je rekening houdt met de verandering in gravitatieversnelling boven de Aarde. In de volgende opdrachten onderzoeken we of Bob gelijk heeft.



Figuur 4: Ruimtestation

- B.4** Leid een uitdrukking af voor de gravitatieversnelling $g_E(h)$ voor kleine hoogtes h boven het aardoppervlak en bepaal de hoekfrequentie $\tilde{\omega}_E$ van de trillende massa (lineaire benadering is voldoende). We benoemen de straal van de aarde als R_E . Verwaarloos de rotatie van de aarde. 0.8pt

Inderdaad, voor dit ruimtestation vindt Alice dat het massa-veer systeem met dezelfde frequentie trilt die Bob heeft voorspeld.

- B.5** Voor welke straal R van het ruimtestation zijn de hoekfrequentie ω en de hoekfrequentie $\tilde{\omega}_E$ op het aardoppervlak gelijk aan elkaar? Druk je antwoord uit in termen van R_E . 0.3pt

Verbitterd door Bob's eigenwijsheid, komt Alice met een experiment om Bob te overtuigen. Hiervoor klimt ze op een toren met hoogte H boven de vloer van het ruimtestation en laat een massa vallen. Dit experiment kan bekeken worden in zowel een roterend assenstelsel als in een inertiaalstelsel.

In een eenparig roterend assenstelsel ondervinden de astronauten een fictieve kracht \vec{F}_C , die Coriolis kracht genoemd wordt. De kracht \vec{F}_C , die werkt op een object met massa m welke beweegt met een snelheid \vec{v} in een roterend assenstelsel met een constante hoekfrequentie $\vec{\omega}_{ss}$, wordt gegeven door

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

Met scalaire grootheden kun je gebruik maken van

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

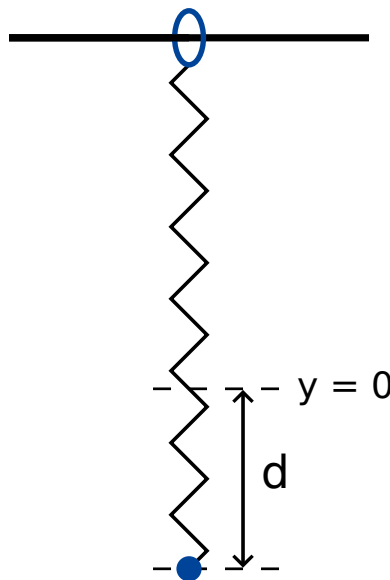
waarbij ϕ de hoek is tussen de snelheid en rotatie-as. De kracht staat loodrecht op zowel de snelheid v als de rotatie-as. De richting van de kracht kan worden bepaald met behulp van de rechterhandregel, maar mag in de onderstaande opgaven ook vrij gekozen worden.

- B.6** Bereken voor de massa de horizontale snelheid v_x en de horizontale verplaatsing d_x (relatief ten opzichte van de as van de toren en in de richting loodrecht op de toren) op het tijdstip dat het de vloer raakt. Je mag aannemen dat de hoogte H van de toren klein is, zodat de versnelling zoals gemeten door de astronauten constant is tijdens de valbeweging. Neem ook aan dat $d_x \ll H$. 1.1pt

Om een goed resultaat te krijgen, besluit Alice om haar experiment uit te voeren bij een veel hogere toren. Tot haar verbazing, raakt de massa de vloer precies bij de as van toren, zodat $d_x = 0$.

- B.7** Geef een ondergrens voor de hoogte van de toren waarbij het kan gebeuren dat $d_x = 0$. 1.3pt

Alice doet een laatste poging om Bob te overtuigen. Ze wil haar massa-veer systeem gebruiken om het effect te tonen van de Coriolis kracht. Hiervoor verandert ze haar oorspronkelijke opstelling: ze bevestigt de veer aan een ring die zonder wrijving vrij kan schuiven in de horizontale x richting langs een horizontaal geplaatste staaf. Het massa-veer systeem zelf trilt in de y richting. De staaf is evenwijdig aan de vloer en staat loodrecht op de rotatie-as van het ruimtestation. Het xy -vlak staat dus loodrecht op de rotatie-as, waarbij de y richting direct gericht is naar het draaipunt (rotatiecentrum) van het ruimtestation.



Figuur 5: Meetopstelling

- B.8** Alice trekt de massa vanuit het evenwichtspunt $x = 0, y = 0$ over een afstand d naar beneden, en laat het daarna los (zie figuur 5). 1.7pt
- Geef een uitdrukking voor $x(t)$ en $y(t)$. Je mag aannemen dat $\omega_{ss}d$ klein is en verwaarloos de Coriolis kracht voor beweging langs de y -as.
 - Geef een schets van de baan $(x(t), y(t))$, waarbij je alle belangrijke kenmerken, zoals de amplitude, aangeeft.

Alice en Bob blijven discussiëren.

Twee problemen uit de mechanica (10 punten)

Deel A. De verborgen schijf (3,5 punten)

A.1 (0.8 pt)

$$b =$$

A.2 (0.5 pt)

Bewegingsvergelijking voor φ :

$$I_S =$$

A.3 (0.4 pt)

$$d =$$

A.4 (0.7 pt)

$$I_S =$$

A.5 (1.1 pt)

$$h_2 =$$

$$r_2 =$$

Deel B. Roterend ruimtestation (6,5 punten)

B.1 (0.5 pt)

$$\omega_{ss} =$$

B.2 (0.2 pt)

$$\omega_E =$$

B.3 (0.6 pt)

$$\omega =$$

B.4 (0.8 pt)

$$g_E(h) =$$

$$\tilde{\omega}_E =$$

B.5 (0.3 pt)

$$R =$$

B.6 (1.1 pt)

$$v_x =$$

$$d_x =$$

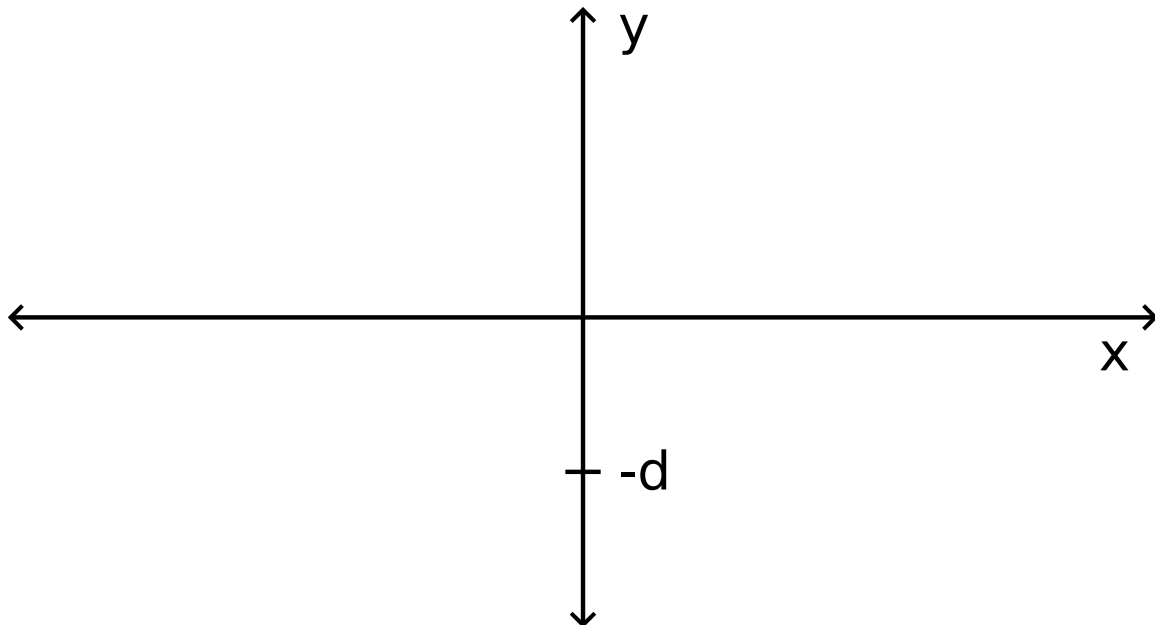
B.7 (1.3 pt)

$$H \geq$$

B.8 (1.7 pt)

$$x(t) =$$

$$y(t) =$$



Niet-lineaire dynamica in elektrische schakelingen (10 punten)

Neem voor het begin van deze opgave de algemene instructies uit de aparte enveloppe door!

Inleiding

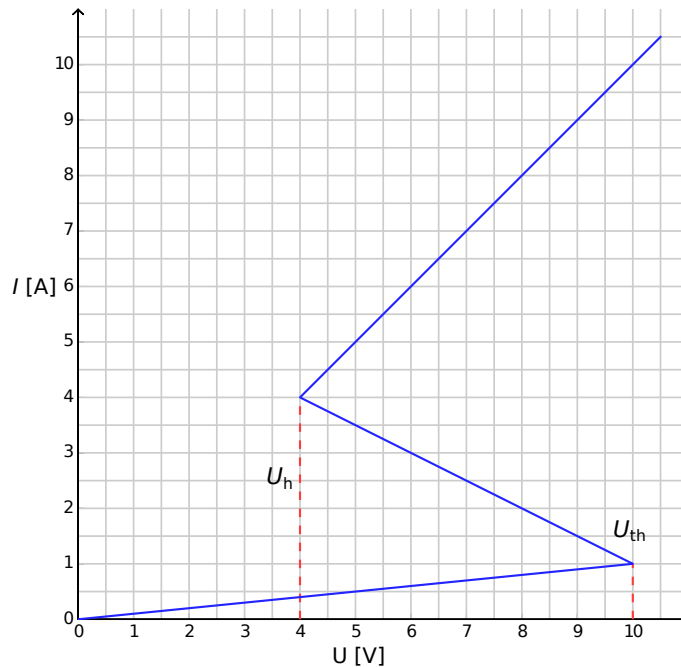
Bistabiele niet-lineaire halfgeleider elementen (bijvoorbeeld thyristors) worden veel gebruikt in elektronica als schakelaars en generatoren van elektromagnetische trillingen. Het grootste toepassingsgebied van thyristors is het regelen van wisselstromen in vermogenselektronica, bijvoorbeeld gelijkrichten van wisselstroom naar gelijkstroom in de megawatt schaal. Bistabiele elementen kunnen ook dienen als modelsystemen voor zelforganiserende verschijnselen in de natuurkunde (dit onderwerp wordt in deel B van het probleem behandeld), biologie (zie deel C) en andere gebieden van de moderne niet-lineaire wetenschap.

Doelen

Onderzoeken van instabiliteiten en niet triviale dynamica van schakelingen met onderdelen die een niet-lineaire $I - V$ karakteristiek hebben. Ontdekken van mogelijke toepassingen van dergelijke onderdelen in engineering en in het modelleren van biologische systemen.

Deel A. Stationaire toestanden en instabiliteiten (3 punten)

Fig. 1 laat de zogenaamde **S-shaped** $I - V$ karakteristiek zien van een niet-lineair element X . In het spanningsinterval tussen $U_h = 4.00 \text{ V}$ (de 'holding' spanning) en $U_{th} = 10.0 \text{ V}$ (de 'threshold' spanning) is te zien dat deze $I - V$ karakteristiek meerwaardig (multivalued) is. De grafiek in Fig. 1 wordt voor de eenvoud 'piece-wise lineair' genomen, elke tak is een deel van een rechte lijn. De lijn in de bovenste tak gaat door de oorsprong als deze wordt doorgetrokken. Deze benadering levert een goede beschrijving van echte thyristors.



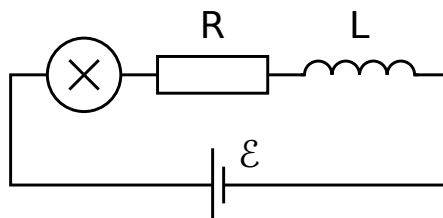
Figuur 1: $I - V$ karakteristiek van het niet-lineaire element X .

- A.1** Bepaal met behulp van de grafiek de weerstand R_{on} van het element X in de bovenste tak van de $I - V$ karakteristiek en R_{off} van de onderste tak. De middelste tak wordt beschreven door de vergelijking 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \quad (1)$$

Bepaal de waarden van de parameters I_0 en R_{int} .

Het element X wordt in serie verbonden met een weerstand R , een spoel L en een ideale spanningsbron \mathcal{E} (zie Fig.2). Men zegt dat de schakeling in een stationaire toestand zit als de stroom in de tijd constant is, oftewel $I(t) = \text{const.}$



Figuur 2: Schakeling met element X , weerstand R , spoel L en spanningsbron \mathcal{E} .

A.2 Wat is het aantal mogelijke stationaire toestanden in de schakeling van Fig. 2 voor een vaste waarde van \mathcal{E} en voor $R = 3.00 \Omega$? Hoe verandert dit antwoord als $R = 1.00 \Omega$? 1pt

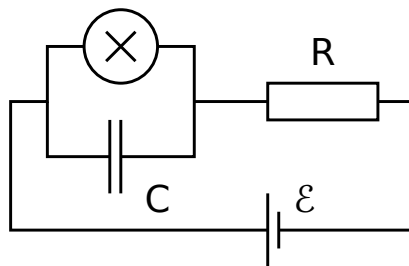
A.3 Stel $R = 3.00 \Omega$, $L = 1.00 \mu\text{H}$ en $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ in de schakeling van Fig. 2. Bepaal de waarden van de stroom $I_{\text{stationary}}$ door en de spanning $V_{\text{stationary}}$ over het niet-lineaire element X in de stationaire toestand. 0.6pt

De schakeling van Fig. 2 bevindt zich in een stationaire toestand met $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Deze stationaire toestand wordt stabiel genoemd als na verandering (toename of afname van de stroom), de stroom weer terugkeert naar de stationaire toestand. Als de stroom echter wegloopt van de stationaire toestand, wordt de stationaire toestand instabiel genoemd.

A.4 Gebruik de numerieke waarden van vraag **A.3** en bestudeer de stabiliteit van de stationaire toestand met $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Is de stationaire toestand stabiel of instabiel? 1pt

Deel B. Bistabiele niet-lineaire elementen in natuurkunde: radiozender (5 punten)

We gaan nu een nieuwe schakeling onderzoeken, zie Fig. 3. In deze nieuwe situatie wordt het niet-lineaire element X parallel geschakeld met een condensator met een capaciteit van $C = 1.00 \mu\text{F}$. Dit blok wordt vervolgens in serie verbonden met een weerstand met een waarde van $R = 3.00 \Omega$ en een ideale spanningsbron. Deze spanningsbron levert een constante spanning van $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$. Het blijkt dat deze schakeling gaat oscilleren. Hierbij springt het niet-lineaire element tijdens een cyclus van de ene tak in de $I - V$ karakteristiek naar een andere tak.



Figuur 3: Schakeling met element X , condensator C , weerstand R en spanningsbron \mathcal{E} .

B.1 Teken de oscillatiecyclus in de $I - V$ grafiek, inclusief de richting (met de klok mee of tegen de klok in). Geef een duidelijke uitleg met behulp van vergelijkingen en schetsen. 1.8pt

B.2 Geef uitdrukkingen voor de tijden t_1 and t_2 die het systeem doorbrengt in elke tak van de $I - V$ grafiek tijdens de oscillatiecyclus. Bereken ook hun numerieke waarden. Bepaal de numerieke waarde van de gehele oscillatieperiode T aangenomen dat de tijd die nodig om van de ene tak in de $I - V$ grafiek naar de andere te springen te verwaarlozen is. 1.9pt

B.3 Maak een schatting van het gemiddeld gedissipeerde vermogen P in het niet-lineaire element gedurende één oscillatiecyclus. Een orde grootte is hier voldoende. 0.7pt

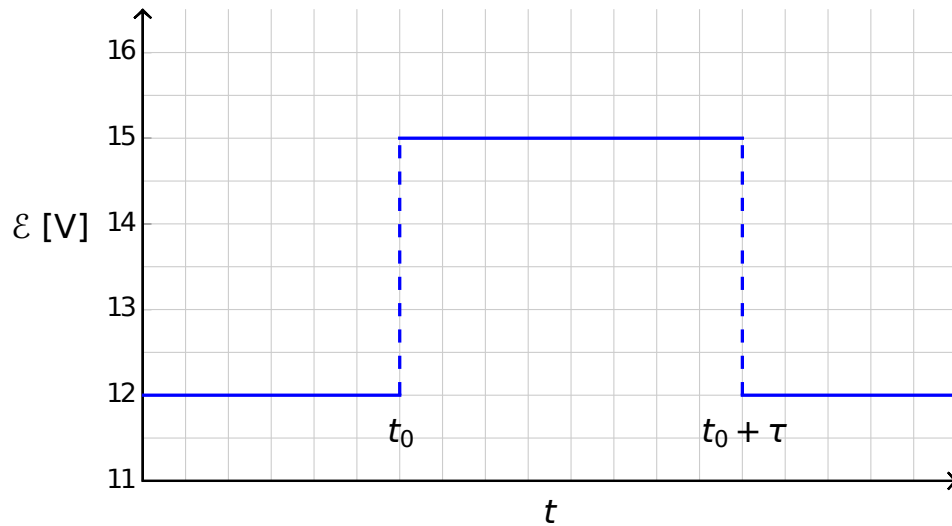
De schakeling in Fig. 3 wordt gebruikt om een radiozender te maken. Om dit te verwezenlijken, wordt het element X verbonden met het uiteinde van een lineaire antenne (een lange rechte draad). De antenne heeft een lengte s . Het andere einde van de draad is los. In de antenne ontstaat een elektromagnetische staande golf. De snelheid van elektromagnetische golven langs de antenne is hetzelfde als in vacuüm. De zender gebruikt de grondfrequentie (laagste frequentie) met een periode T uit vraag **B.2**.

B.4 Wat is de optimale waarde van s aangenomen dat deze niet groter kan zijn dan 1 km? 0.6pt

Onderdeel C. Bistabiele niet-lineaire elementen in biologie: neuristor (2 punten)

In dit onderdeel van het probleem beschouwen we een toepassing van bistabiele niet-lineaire elementen bij het modelleren van biologische processen. Een neuron in het menselijk brein heeft de volgende eigenschap: als het wordt geëxciteerd door een extern signaal, zal het een enkele oscillatie maken en weer terugkeren naar de initiële toestand. Deze eigenschap wordt prikkelbaarheid (excitability) genoemd. Door deze eigenschap kunnen pulsen zich voortplanten in een netwerk van gekoppelde neuronen waaruit een zenuwstelsel bestaat. Een halfgeleiderchip ontworpen om de prikkelbaarheid en de pulsvoortplanting na te bootsen wordt een neuristor (samentrekking van neuron en transistor) genoemd.

We proberen een eenvoudige neuristor te modelleren door gebruik te maken van een schakeling waarin het eerder onderzochte niet-lineaire element X is opgenomen. Daartoe wordt de spanning \mathcal{E} in de schakeling van Fig. 3 verlaagd tot een waarde van $\mathcal{E}' = 12.0$ V. De oscillatie stopt hierdoor en bereikt een stationaire toestand. Vervolgens wordt de spanning snel verhoogd tot een waarde van $\mathcal{E} = 15.0$ V, en na een periode τ (met $\tau < T$) weer terug naar de waarde \mathcal{E}' (zie Fig. 4). Het blijkt dat er een zekere kritische waarde $\tau_{\text{crit.}}$ is waarvoor geldt dat er kwalitatief ander gedrag is voor $\tau < \tau_{\text{crit.}}$ en voor $\tau > \tau_{\text{crit.}}$.



Figuur 4: Spanning van de spanningsbron als functie van de tijd.

- | | | |
|------------|--|-------|
| C.1 | Schets de grafieken van de tijdsafhankelijkheid van de stroom $I_X(t)$ door het niet-lineaire element X voor $\tau < \tau_{\text{crit}}$ en voor $\tau > \tau_{\text{crit}}$. | 1.2pt |
| C.2 | Geef een uitdrukking en de numerieke waarde voor de kritische tijd τ_{crit} waarbij het gedrag verandert. | 0.6pt |
| C.3 | Is de schakeling met $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s een neuristor? | 0.2pt |

Niet-lineaire dynamica in elektrische schakelingen (10 punten)

Deel A. Stationaire toestanden en instabiliteiten (3 punten)

A.1 (0.4 pt)

$$R_{\text{on}} =$$

$$R_{\text{off}} =$$

$$I_0 =$$

$$R_{\text{int}} =$$

A.2 (1 pt)

Mogelijke aantal stationaire toestanden voor $R = 3.00 \Omega$:

Mogelijke aantal stationaire toestanden voor $R = 1.00 \Omega$:

A.3 (0.6 pt)

$$I_{\text{stationary}} =$$

$$V_{\text{stationary}} =$$

A.4 (1 pt)

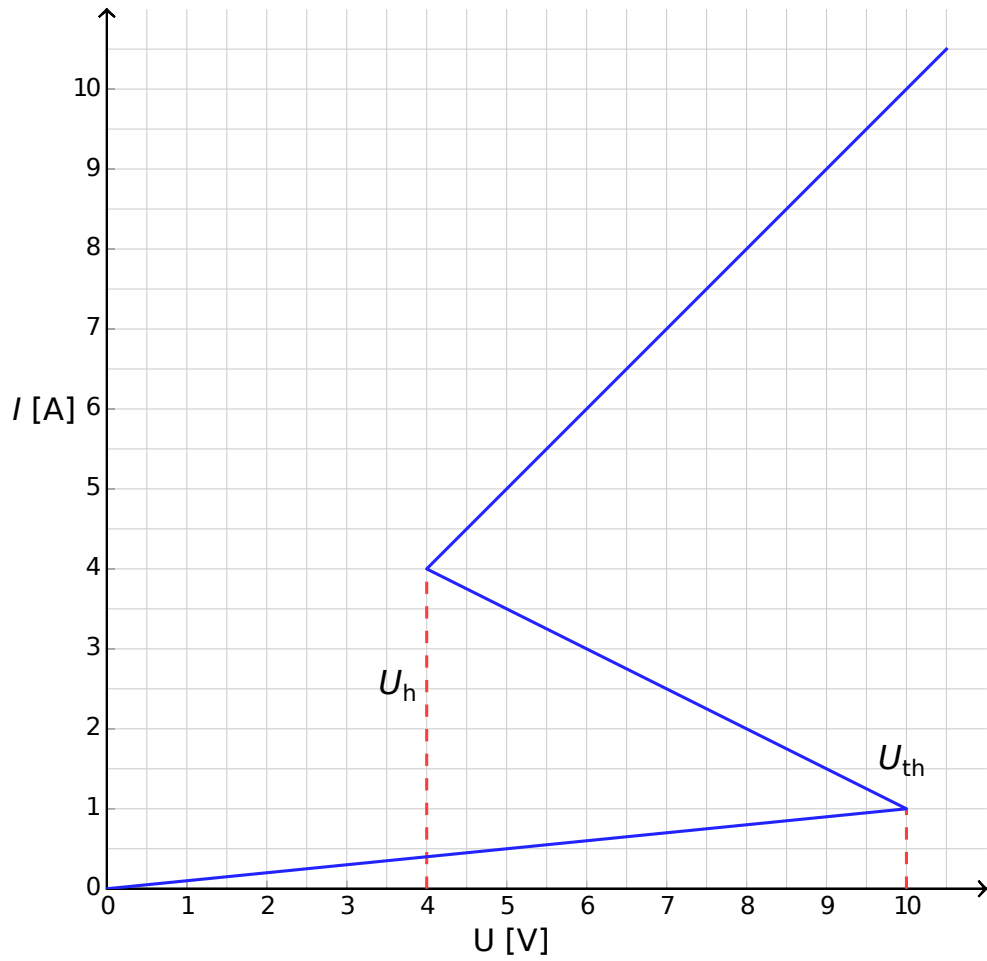
Gedrag voor $I(t = 0) > I_{\text{stationary}}$:

Gedrag voor $I(t = 0) < I_{\text{stationary}}$:

Is de stationaire toestand: stabiel? instabiel?

Deel B. Bistabiele niet-lineairelementen in natuurkunde: radio zender (5 punten)

B.1 (1.8 pt)



Verantwoording:

B.2 (1.9 pt)

Formule van $t_1 =$

Numerieke waarde van $t_1 =$

Formule van $t_2 =$

Numerieke waarde van $t_2 =$

Numerieke waarde van $T =$

B.3 (0.7 pt)

$P \approx$

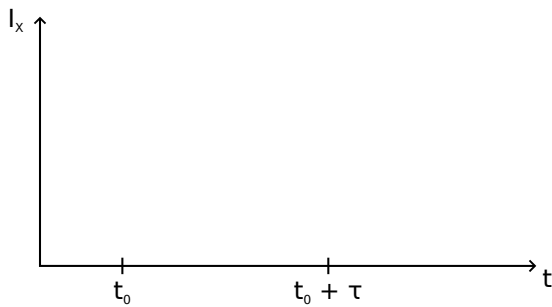
B.4 (0.6 pt)

$s =$

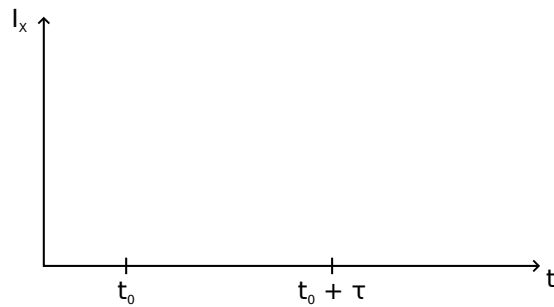
Deel C. Bistabiele niet-lineaire elementen in biologie: neuristor (2 punten)

C.1 (1.2 pt)

Tekening voor $\tau < \tau_{\text{crit}}$:



Tekening voor $\tau > \tau_{\text{crit}}$:



C.2 (0.6 pt)

Uitdrukking voor $\tau_{\text{crit}} =$

Numerieke waarde van $\tau_{\text{crit}} =$

C.3 (0.2 pt)

Is de schakeling een neuristor? Ja Nee

De grote hadronen botsingsmachine (LHC) (10 punten)

Lees eerst de algemene instructies in de aparte envelop alvorens te starten met deze vraag.

In deze opdracht wordt de fysica van de deeltjesversneller LHC (Large Hadron Collider) te CERN besproken. CERN is het grootste deeltjesfysica-laboratorium ter wereld. Haar missie is inzicht te krijgen in de fundamentele wetten van de natuur. Twee deeltjesbundels worden versneld tot hoge energieën, in de ringvormige versneller gehouden met behulp van een sterk magnetisch veld en dan tot botsing met elkaar gebracht. De protonen zijn niet uniform verspreid over de omtrek van de versneller, maar zijn gegroepeerd in zogeheten bundels. De deeltjes die ontstaan bij deze botsingen worden geobserveerd met grote detectoren. Enkele parameters van de LHC kun je vinden in tabel 1.

LHC ring	
Omtrek van de ring	26659 m
Aantal pakketten per protonenbundel	2808
Aantal protonen per pakket	1.15×10^{11}
Protonenbundels	
Energie van de protonen	7.00 TeV
Energie van het massamiddelpunt	14.0 TeV

Tabel 1: Typische numerieke waarden van relevante LHC parameters.

Deeltjesfysici gebruiken handige eenheden voor energie, impuls en massa. De energie wordt gemeten in elektronvolt (eV). 1 eV is de hoeveelheid energie die een deeltje met elementaire lading e krijgt wanneer het een potentiaalverschil van 1 Volt doorloopt ($1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$).

De impuls wordt uitgedrukt in de eenheid eV/c en de massa in eV/c^2 waarbij c de lichtsnelheid in vacuüm is. Aangezien 1 eV een heel kleine hoeveelheid energie is, gebruiken deeltjesfysici vaak MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$), GeV ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) of TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$).

Deel A heeft te maken met de versnelling van protonen of elektronen, deel B met de identificatie van de deeltjes die ontstaan bij de botsingen in CERN.

Deel A: De LHC-versneller (6 punten)

Versnelling:

Neem aan dat de protonen werden versneld door een spanning V zodat hun snelheid bijna (nagenoeg) gelijk is aan de lichtsnelheid en verwaarloos energieverliezen als gevolg van straling of botsingen met andere deeltjes.

A.1 Geef de exacte uitdrukking voor de eindsnelheid v van de protonen als functie van de versnelling V en fysische constanten. 0.7pt

In een ontwerp voor een toekomstig experiment te CERN wil men de protonen van de LHC laten botsen met elektronen welke een energie hebben gelijk aan 60.0 GeV.

- A.2** Voor deeltjes met hoge energie en kleine massa is de relatieve afwijking $\Delta = (c-v)/c$ van de eindsnelheid v t.o.v. de lichtsnelheid heel klein. Geef een eerste orde benadering voor Δ en bereken Δ voor elektronen met een energie van 60.0 GeV gebruikmakend van de versnelling V en fysische constanten. 0.8pt

We gaan nu terug naar de protonen in de LHC. Neem aan dat de bundelbuis een cirkelvorm heeft.

- A.3** Leid een uitdrukking af voor de homogene magnetische fluxdichtheid B die nodig is om de protonenbundel in een cirkelbaan te houden. De uitdrukking mag alleen de energie van de protonen E , de omtrek L , fundamentele constanten en getallen bevatten. Je mag geschikte benaderingen gebruiken als hun effect kleiner is dan de nauwkeurigheid van het kleinste aantal significante cijfers. Bereken de magnetische fluxdichtheid B voor een protonenergie van $E = 7.00$ TeV. Verwaarloos hierbij de interactie tussen de protonen. 1.0pt

Uitgestraald vermogen:

Een versneld geladen deeltje straalt energie uit in de vorm van elektromagnetische golven. Het uitgestraald vermogen P_{rad} van een geladen deeltje dat ronddraait met een constante hoeksnelheid hangt alleen af van zijn versnelling a , zijn lading q , de lichtsnelheid c en de permittiviteit van het vacuüm ϵ_0 .

- A.4** Zoek met behulp van een dimensie-analyse een uitdrukking voor het uitgestraald vermogen P_{rad} . 1.0pt

De eigenlijke formule voor het uitgestraald vermogen bevat een factor $1/(6\pi)$; bovendien, een volledig relativistische afleiding geeft nog een bijkomende vermenigvuldigingsfactor γ^4 , met $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

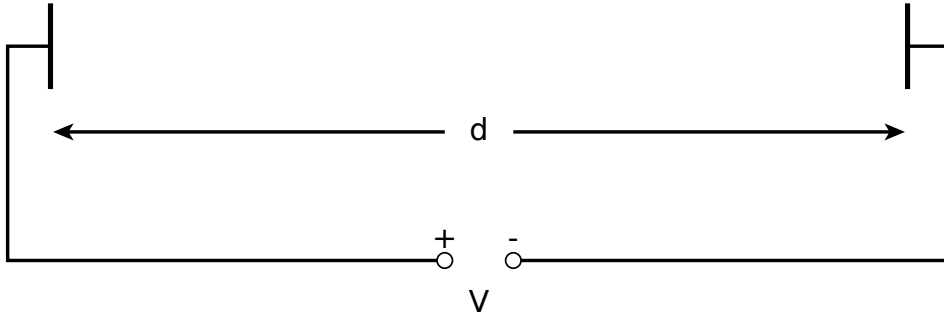
- A.5** Bereken P_{tot} , het totaal uitgestraald vermogen van de LHC voor een protonenergie $E = 7.00$ TeV (zie tabel 1). Je mag geschikte benaderingen gebruiken. 1.0pt

Lineaire versnelling:

In CERN worden protonen vanuit rust versneld door een lineaire versneller met lengte $d = 30.0$ m door een potentiaalverschil van $V = 500$ MV. Neem aan dat het elektrisch veld homogeen is. Een lineaire versneller bestaat uit twee platen zoals geschetst in figuur 1.

A.6 Bepaal de tijd T die de protonen nodig hebben om door dit veld te gaan.

1.5pt



Figuur 1: Schets van een versnellersmodule

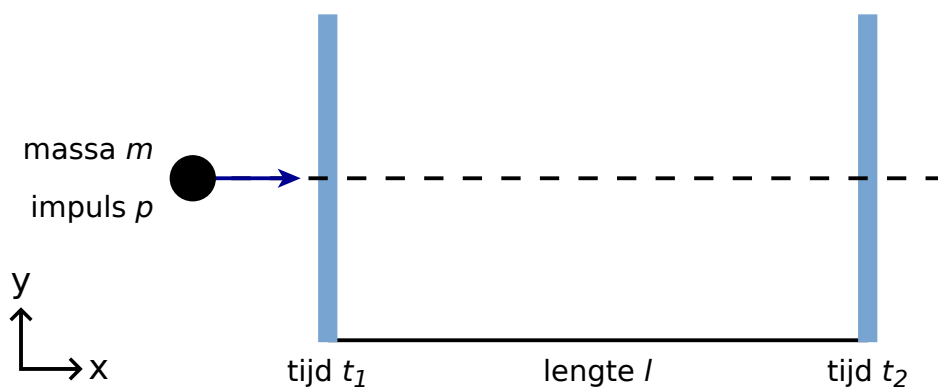
Deel B: Deeltjesidentificatie (4 punten)

Time of flight (vluchttijd)

Om het interactieproces te kunnen interpreteren is het belangrijk de hoog energetische deeltjes die ontstaan bij de botsing te identificeren. Een eenvoudige methode is om de tijd (t) te meten dat een deeltje met een bekende impuls nodig heeft om een lengte l af te leggen in een zogeheten Time-of-Flight (ToF) detector. Typische deeltjes die geïdentificeerd worden in een detector met hun massa gegeven in tabel 2.

Deeltje	Massa [MeV/c^2]
Deuteron	1876
Proton	938
Geladen kaon	494
Geladen pion	140
Elektron	0.511

Tabel 2: Deeltjes en hun massa.

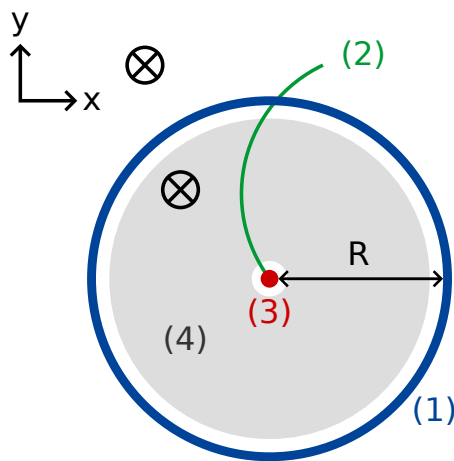


Figuur 2: Schema van een time-of flight detector

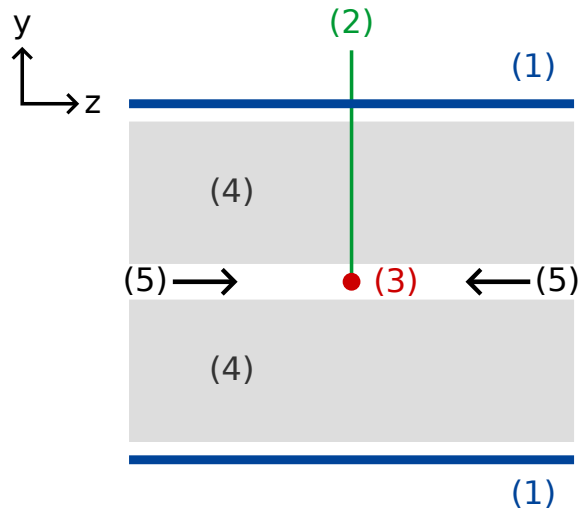
- B.1** Druk de massa m in termen van de impuls p , de vluchtlengte l en de vluchttijd t . Neem daarbij aan dat deeltjes een elementaire lading e hebben en bewegen met een snelheid nagenoeg gelijk aan de lichtsnelheid c op rechte banen in de ToF detector en dat ze loodrecht bewegen op de twee detectieplaten (zie figuur 2). 0.8pt

- B.2** Bereken de minimale lengte l van een ToF-detector die het mogelijk maakt dat een geladen kaon voldoende te onderscheiden is van een geladen pion als de gemeten impuls voor beide gelijk is aan $1.00 \text{ GeV}/c$. Voor een goed onderscheid is het nodig dat het verschil in vluchttijd groter is dan driemaal de tijdsresolutie van de detector. De typische resolutie van een ToF-detector is 150 ps ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$). 0.7pt

In het volgende worden deeltjes, geproduceerd in een typische LHC-detector, geïdentificeerd in een twee-stappen-detector bestaande uit een baandetector en een ToF-detector. Figuur 3 toont de opstelling in een vlak loodrecht op en evenwijdig aan de protonenbundels. Beide detectoren zijn buizen die de interactieruimte omgeven waarbij de bundel het midden van de buizen volgt. De baan-detector meet het traject van een geladen deeltje door een magnetisch veld evenwijdig aan de protonenbundels. De straal r van het traject maakt het mogelijk om de transversale component van de impuls p_T van het deeltje te bepalen. Aangezien de botsingstijd bekend is, heeft de ToF-detector slechts één buis nodig om de vluchttijd te meten. Deze vluchttijd wordt gemeten vanaf de botsing tot het bereiken van de ToF-buis. Deze ToF-buis bevindt zich net buiten de baankamer. Voor deze opdracht mag je aannemen dat alle deeltjes gecreëerd bij de botsing loodrecht op de protonenbundel bewegen. Dit betekent dat ze geen impuls hebben in de richting van de protonenbundels.



transversaal vlak



dwarsdoorsnede van de
lengterichting in het centrum
langs de bundellijn van de buis

- (1) - ToF-buis
- (2) - baan
- (3) - botsingsplaats
- (4) - baanbuis
- (5) - protonenbundels
- ⊗ - magnetisch veld

Figuur 3: Experimentele opstelling voor deeltjesidentificatie met een baankamer en een ToF-detector. Beide detectoren zijn buizen rond de botsingsplaats in het midden. Links: transversaal zicht loodrecht op de bundellijn, rechts: longitudinaal beeld evenwijdig aan de bundellijn. Het deeltje beweegt loodrecht op de bundellijn.

B.3 Druk de deeltjesmassa uit in termen van de magnetische fluxdichtheid B , de straal R van de ToF-buis, fundamentele constanten en de gemeten grootheden: de straal r van de baan en de vluchttijd t . 1.7pt

We detecteerden vier deeltjes en willen ze identificeren. De magnetische fluxdichtheid in de baan-detector was $B = 0.500 \text{ T}$. De straal R van de ToF-buis was 3.70 m . De meetresultaten vind je hieronder ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$):

Deeltje	Straal van de baan r [m]	Vluchttijd t [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.31	25

B.4 Identificeer de vier deeltjes door hun massa te berekenen.

0.8pt

De grote hadronen botsingsmachine (LHC) (10 punten)

Deel A. LHC versneller (6 punten)

A.1 (0.7 pt)

$v =$

A.2 (0.8 pt)

benadering: $\Delta =$

numeriek: $\Delta =$

A.3 (1.0 pt)

uitdrukking: $B =$

numeriek: $B =$

A.4 (1.0 pt)

$P_{\text{rad}} \propto$

A.5 (1.0 pt)

$P_{\text{tot}} =$

A.6 (1.5 pt)

$T =$

Deel B. Deeltjesidentificatie (4 punten)

B.1 (0.8 pt)

$m =$

B.2 (0.7 pt)

$l =$

B.3 (1.7 pt)

$m =$

B.4 (0.8 pt)

deeltje	Gemeten massa; eenheid van massa []:	Geïdentificeerd als:
A		
B		
C		
D		