

- De theoretische toets duurt 5 uur. Er zijn 3 vragen die samen 30 punten waard zijn. Merk op dat de 3 vragen niet evenveel punten opleveren.
- Je mag de bruine envelop met de vragen niet openen voor het geluidssignaal dat het begin van de competitie aangeeft (fluittoon).
- Voor elke vraag is er een special antwoordblad (zie bovenkant met nummer en kleur). Schrijf je antwoorden in de juiste plaats op het corresponderende antwoordblad.
- Gebruik het officiële IPhO schrijfpapier of IPhO grafiekpapier voor gedetailleerde berekeningen. **VUL ALLE GEGEVENS IN AAN DE BOVENKANT** en **SCHRIJF ALLEEN OP DE VOORKANT VAN HET BLAD** (de achterkant wordt niet gescand). Gebruik zo weinig mogelijk tekst: probeer je oplossing hoofdzakelijk met vergelijkingen, getallen, symbolen en grafieken te verduidelijken. Als je iets op een blad geschreven hebt dat je niet beoordeeld wilt hebben, streep het dan door.
- Je mag je plaats niet verlaten zonder toestemming. Als je hulp van gelijk welke aard nodig hebt (rekenmachine stuk, meer bladen nodig, dringend naar de WC enz.), steek dan je hand op tot één van de gidsen komt.
- Het einde van de toets wordt aangegeven door een geluidssignaal (fluittoon). Je moet dan onmiddellijk stoppen met schrijven. Als je klaar bent voor het eindsignaal, steek dan je hand op.
- Sorteert je bladen **MET DE VOORZIJDE NAAR BOVEN** in volgorde en steek ze in de bruine envelop:
 1. Antwoordblad T1 gevolgd door gedetailleerde berekeningen voor T1.
 2. Antwoordblad T2 gevolgd door gedetailleerde berekeningen voor T2.
 3. Antwoordblad T3 gevolgd door gedetailleerde berekeningen voor T3.
- Je mag geen enkel blad meenemen.

Data sheet: Tabel van natuurkundige grootheden

Snelheid van het licht in vacuüm	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante van Planck gedeeld door 2π	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Gravitatie constante	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Valversnelling op Aarde	$g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$
Elementaire lading	$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Elektrische permittiviteit van vacuüm	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Massa elektron	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante van Avogadro	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante van Boltzmann	$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Steenachtige meteoriet, soortelijke warmte	$c_{sm} = 1.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Steenachtige meteoriet, thermische geleidbaarheid	$k_{sm} = 2.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Steenachtige meteoriet, dichtheid	$\rho_{sm} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Steenachtige meteoriet, smeltpunt	$T_{sm} = 1.7 \times 10^3 \text{ K}$
Steenachtige meteoriet, smeltwarmte	$L_{sm} = 2.6 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Zilver, molaire massa	$M_{Ag} = 1.079 \times 10^{-1} \text{ kg mol}^{-1}$
Zilver, dichtheid	$\rho_{Ag} = 1.049 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Zilver, soortelijke warmte	$c_{Ag} = 2.40 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Water, molaire massa	$M_{wa} = 1.801 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$
Water, dichtheid	$\rho_{wa} = 0.998 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Water, soortelijke warmte	$c_{wa} = 4.181 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Water, verdampingswarmte	$L_{wa} = 2.260 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$
Water, kookpunt	$T_{100} = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373.15 \text{ K}$
Ijs (ice), dichtheid	$\rho_{ice} = 0.917 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Stoom, soortelijke warmte	$c_{st} = 2.080 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Aarde (Earth), massa van de	$m_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Aarde (Earth), straal van de	$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$
Zon (Sun), massa van de	$m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Zon (Sun), straal van de	$R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Gemiddelde afstand Zon-Aarde	$a_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

Inleiding

Een meteoroïde is een klein stukje (kenmerkend is dat het kleiner is dan 1 m) van een komeet of een asteroïde. Een meteoroïde die de grond raakt wordt een meteoriet genoemd.

In de nacht van 17 januari 2009 zagen heel wat mensen nabij de Baltische Zee een gloeiend spoor of een vuurbal van een meteoroïde die de atmosfeer van de aarde binnenviel. In Zweden registreerde een bewakingscamera deze gebeurtenis, zie Fig.1.1(a). Op basis van deze beelden en verslagen van ooggetuigen was het mogelijk af te leiden waar zij ongeveer neerstortte, en zes weken later werd een meteoriet met massa 0.025 kg gevonden in de buurt van de stad Maribo in Zuid-Denemarken. Metingen op de meteoriet, nu Maribo genoemd, en van zijn baan aan de hemel leverde interessante resultaten op. Zijn snelheid bij het binnendringen in de atmosfeer was uitzonderlijk hoog. Zijn ouderdom, 4.567×10^9 jaar, toont aan dat hij gevormd werd kort na het ontstaan van het zonnestelsel. De Maribometeoriet is mogelijk een deel van de komeet Encke.

De snelheid van Maribo

De vuurbal verplaatste zich westwaarts, onder een hoek van 285° met het Noorden (met de klok mee gemeten), naar de plaats waar de meteoriet later werd gevonden, zoals getekend in Fig 1.1. De meteoriet werd gevonden op een afstand van 195 km van de bewakingscamera onder een hoek van 230° met het Noorden (met de klok mee gemeten).

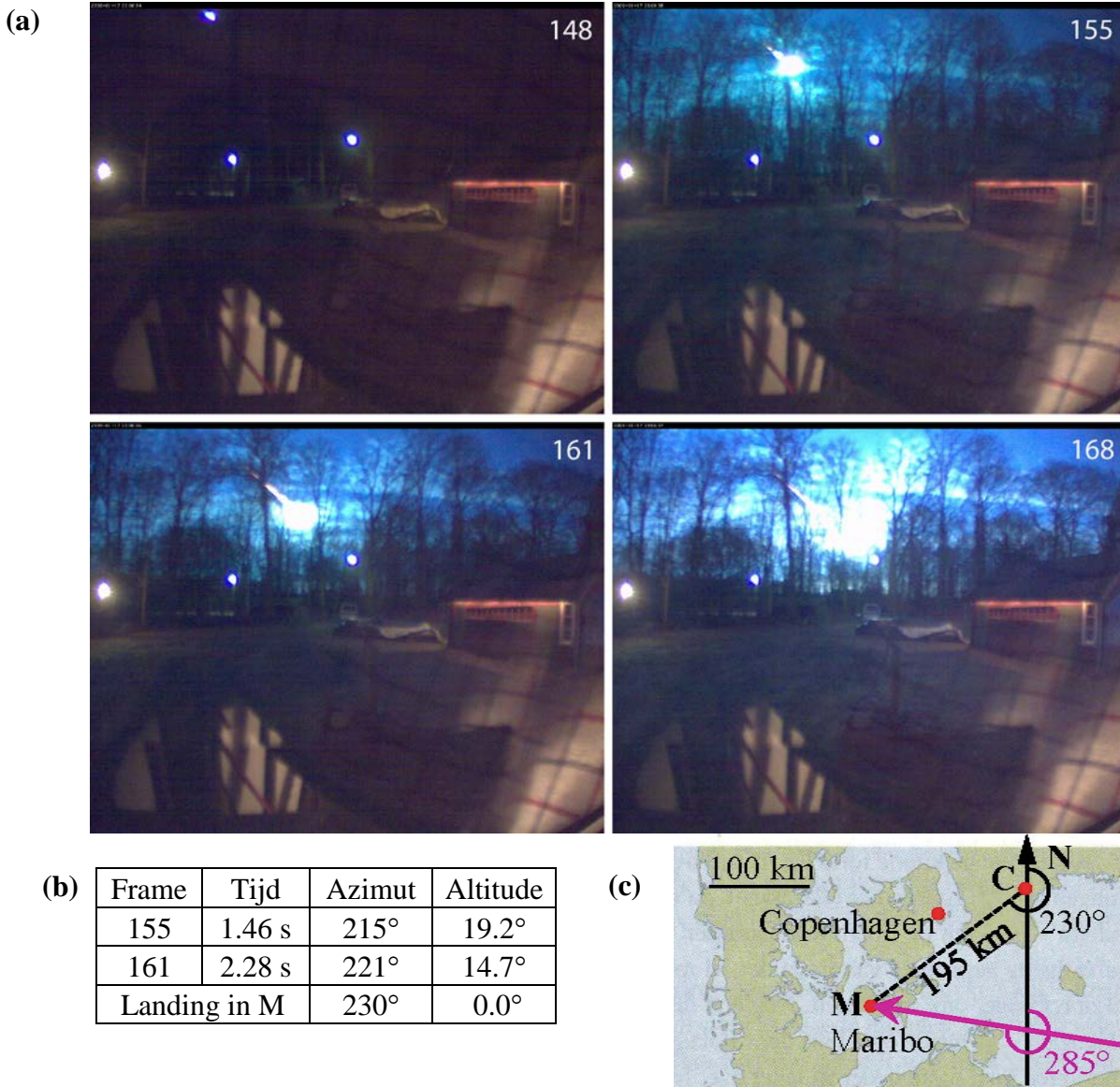
1.1	Gebruik dit en de gegevens in Fig. 1.1 om de gemiddelde snelheid van Maribo te berekenen tussen de beelden 155 en 161. De kromming van het aardoppervlak en de gravitatiekracht op de meteoroïde mogen beide verwaarloosd worden.	1.3
-----	---	-----

Door de atmosfeer en smelten?

De luchtweerstand voor een meteoroïde in de hogere lagen van de atmosfeer hangt op een ingewikkelde manier af van de vorm en de snelheid van de meteoroïde, en van de temperatuur en de dichtheid van de atmosfeer. Een redelijke benadering voor de wrijvingskracht F in de bovenste lagen van de atmosfeer wordt gegeven door de uitdrukking $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$, waarin k een constante is, ρ_{atm} de dichtheid van de atmosfeer, A de geprojecteerde dwarsdoorsnede van de meteoriet, en v zijn snelheid.

De volgende vereenvoudigende veronderstellingen worden gemaakt om de meteoriet te analyseren: het object dat de atmosfeer binnendrong was een bol met massa $m_M = 30$ kg, $R_M = 0.13$ m, temperatuur $T_0 = 200$ K, en snelheid $v_M = 2.91 \times 10^4$ m/s. De dichtheid van de atmosfeer is constant (en gelijk aan de waarde 40 km boven het aardoppervlak), $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3}$ kg/m³ en de wrijvingscoëfficiënt is $k = 0.60$.

1.2a	Maak een schatting van de tijd die de meteoroïde nodig heeft om haar snelheid met 10% te verminderen vanaf v_M bij het betreden van de atmosfeer tot $0.90 v_M$. Je kan de gravitatiekracht op de meteoroïde verwaarlozen en aannemen dat zij haar massa en vorm behoudt.	0.7
1.2b	Bereken hoeveel keer de kinetische energie E_{kin} van de meteoroïde bij het binnendringen in de atmosfeer groter is dan de energie E_{smelt} nodig om ze helemaal te doen smelten (zie gegevensblad).	0.3



Figuur 1.1(a) Azimut is de hoek vanaf het Noorden, met de klok mee in het horizontale vlak, en altitude is de hoek boven de horizon. Een reeks frames opgenomen door de bewakingscamera in Zweden toont de beweging van Maribo als een vuurbal op haar weg naar beneden door de atmosfeer. **(b)** De gegevens van twee frames met aanduiding van tijdstip, richting in graden (azimut), zoals waargenomen door de camera (C), en de hoogte boven de horizon in graden (altitude). **(c)** Schets van de richtingen van het pad (magenta pijl) van Maribo t.o.v. het Noorden en de landingsplaats (M) in Denemarken zoals waargenomen door de camera (C).

De opwarming van Maribo tijdens zijn val in de atmosfeer

Toen de steenachtige meteoroïde Maribo de atmosfeer binnenkwam met een supersonische snelheid verscheen ze als een vuurbal doordat de omgevende lucht gloeide. Echter, alleen de buitenste laag van Maribo was verhit. Neem aan dat Maribo een homogene bol is met dichtheid ρ_{sm} , soortelijke warmte c_{sm} , en warmtegeleidingcoëfficiënt k_{sm} (voor waarden zie blad met gegevens). Verder had zij, bij het binnendringen in de atmosfeer, een temperatuur $T_0 = 200$ K. Tijdens het vallen in de atmosfeer, was haar oppervlaktetemperatuur constant $T_s = 1000$ K door de wrijving met de lucht,

daardoor wordt het binnenste gedeelte dus geleidelijk opgewarmd. Na een tijd t vallen in de atmosfeer, zal een buitenste schil met dikte x verhit zijn tot een temperatuur die beduidend hoger is dan T_0 . Deze dikte kan geschat worden door analyse van de eenheden als een eenvoudig product van de thermodynamische parameters: $x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$

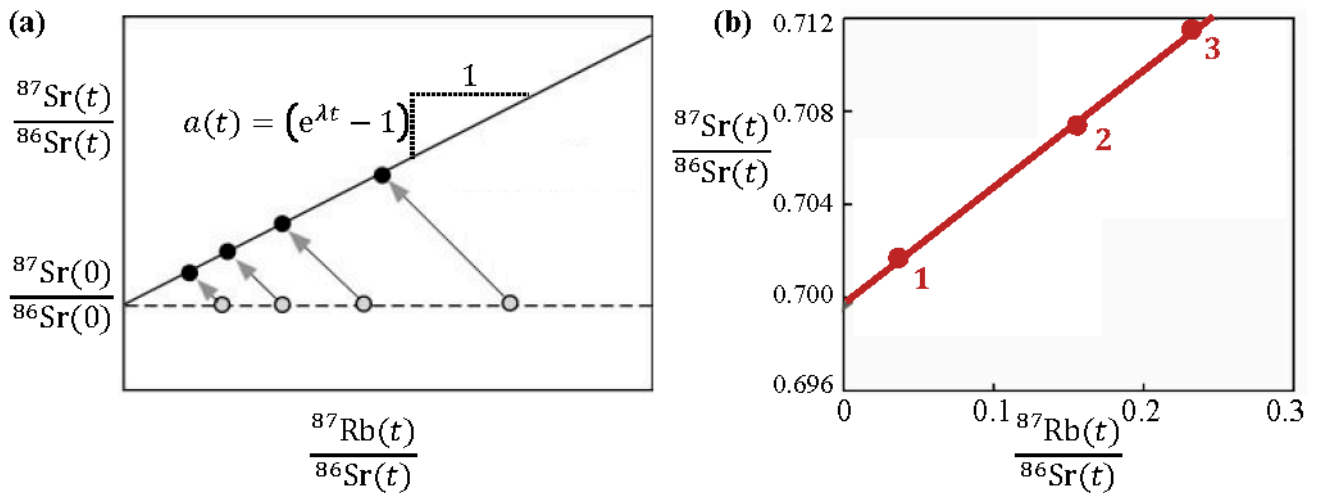
1.3a	Bepaal aan de hand van de eenheden de waarde van de vier machten α , β , γ , en δ .	0.6
1.3b	Bereken de dikte x na een valtijd $t = 5$ s en bepaal de verhouding x/R_M .	0.4

De ouderdom van een meteoriet

De chemische eigenschappen van radioactieve elementen kunnen verschillend zijn, hierdoor zullen sommige mineralen tijdens hun kristallisatie in een bepaalde meteoriet een hoger gehalte van een bepaald radioactief element bevatten en anderen een lager gehalte.

Dit effect kan gebruikt worden om de ouderdom van een meteoriet met behulp van radiometrische datering van zijn radioactieve mineralen. Als voorbeeld, bestuderen we de isotoop ^{87}Rb (atoomnummer 37), die vervalt in de stabiele isotoop ^{87}Sr (atoomnummer 38) met een halfwaardetijd $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ jaar, relatief ten opzichte van de stabiele isotoop ^{86}Sr .

Op het moment van kristallisatie was de verhouding $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ voor alle mineralen identiek, terwijl de verhouding $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ verschillend was. Naarmate de tijd vordert vermindert de hoeveelheid ^{87}Rb door verval terwijl de hoeveelheid ^{87}Sr toeneemt. Hierdoor zal de verhouding $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ nu verschillend zijn. In Fig. 1.2(a), geven de punten op de horizontale lijn de verhouding $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ in verschillende mineralen weer op het tijdstip van kristallisatie.



Figuur 1.2(a) De verhouding $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ in verschillende mineralen op tijd $t = 0$ van kristallisatie (open cirkels) en op dit tijdstip (gevulde cirkels). **(b)** De isochroon-lijn voor drie verschillende mineraal monsters onlangs genomen van een meteoriet.

1.4a	Geef het vervalschema voor de transformatie van ${}^{87}_{37}\text{Rb}$ naar ${}^{87}_{38}\text{Sr}$.	0.3
1.4b	Toon aan dat de huidige verhouding ${}^{87}\text{Sr}/{}^{86}\text{Sr}$ uitgezet tegen de huidige verhouding ${}^{87}\text{Rb}/{}^{86}\text{Sr}$ in verschillende mineraalmonsters van eenzelfde meteoriet een rechte lijn vormt, de zogeheten isochroonlijn, met een helling $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$. Hier is t de tijd sinds de vorming van de mineralen, terwijl λ de vervalconstante is die omgekeerd evenredig is met de halfwaardetijd $T_{1/2}$.	0.7
1.4c	Bepaal de ouderdom τ_M van de meteoriet met behulp van de isochroonlijn van Fig. 1.2(b).	0.4

Komeet Encke, de mogelijke oorsprong van Maribo

In zijn baan rond de zon is de minimale en maximale afstand tussen komeet Encke en de zon respectievelijk $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10}$ m en $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11}$ m.

1.5	Bereken de omlooptijd t_{Encke} van komeet Encke.	0.6
-----	--	-----

Gevolgen van een botsing van een asteroïde met de aarde

65 miljoen jaar geleden werd de Aarde geraakt door een grote asteroïde met dichtheid $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, straal $R_{\text{ast}} = 5.0 \text{ km}$, en eindsnelheid $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4 \text{ m/s}$. Deze botsing resulteerde in de uitroeiing van praktisch alle leven op aarde en de vorming van de enorme Chicxulub Krater. Veronderstel dat een identieke asteroïde vandaag volkomen inelastisch zou botsen met de aarde. Het traagheidsmoment van de Aarde is 0.83 maal dat van een homogene bol met dezelfde massa en straal. Het traagheidsmoment van een homogene bol met massa M en straal R is $\frac{2}{5}MR^2$. Verwaarloos elke verandering in de baan van de Aarde.

1.6a	Bekijk het geval dat de asteroïde de Noordpool raakt. Bepaal de maximale verandering van de richting van de aardas na de botsing (in radialen uitgedrukt).	0.7
1.6b	Bekijk het geval dat de asteroïde de Evenaar radiaal raakt. Bepaal de verandering $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ in duur van een enkele omwenteling van de Aarde na de botsing.	0.7
1.6c	Bekijk het geval dat de asteroïde de Evenaar tangentieel raakt. Bepaal de verandering $\Delta\tau_{\text{tan}}$ in de duur van een enkele omwenteling van de Aarde na de botsing.	0.7

Maximale botsingsnelheid

Bekijk een hemellichaam, door gravitatie gebonden aan het zonnestelsel en dat botst op het oppervlak van de aarde met een snelheid v_{imp} . Bij het begin kan het effect van het gravitatieveld van de aarde op het hemellichaam verwaarloosd worden. Verwaarloos de wrijving in de atmosfeer, het effect van andere hemellichamen en de rotatie van de aarde.

1.7	Bereken $v_{\text{imp}}^{\text{max}}$, de grootst mogelijke waarde van v_{imp} .	1.6
-----	--	-----

Antwoordblad

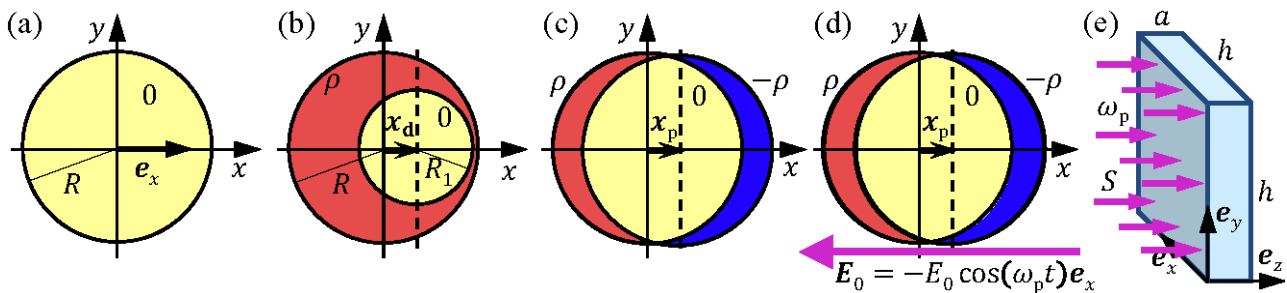
Landencode (2 letters)

Studentnummer (1-5)

1.1	Gemiddelde snelheid $v =$	1.3
1.2a	Tijd $t_{10\%}$ om snelheid te reduceren met 10 %: $t_{10\%} =$	0.7
1.2b	$E_{\text{kin}}/E_{\text{melt}} =$	0.3
1.3a	Diffusie van warmte: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) =$	0.6
1.3b	$x(5 \text{ s}) =$ $x/R_M =$	0.4
1.4a	Rb-Sr vervalschema:	0.3
1.4b	Bewijs dat helling van $a = (e^{\lambda t} - 1)$:	0.7
1.4c	De leeftijd van de meteoriet, $\tau_M =$	0.4
1.5	$t_{\text{Encke}} =$	0.6
1.6a	$\max \Delta\theta =$	0.7
1.6b	$\Delta\tau_{\text{vrt}} =$	0.7
1.6c	$\Delta\tau_{\text{tan}} =$	0.7
1.7	Maximale snelheid van een inslag $v_{\text{imp}}^{\text{max}} =$	1.6
	Totaal	9.0

Introductie

In deze opgave bekijken we een efficiënte manier van stoom produceren, die experimenteel is beproefd en blijkt te werken. Een waterige oplossing van bolvormige zilverdeeltjes met een ordegröte van een nanometer (slechts ongeveer 10^{13} deeltjes per liter) wordt verlicht door een gebundelde lichtbundel. Een deel van dit licht wordt geabsorbeerd door de nanodeeltjes. Ze worden opgewarmd en produceren stoom vlak om zich heen zonder de gehele waterige oplossing op te warmen. De stoom verlaat het systeem via ontsnappende stoombelletjes. Op het moment worden nog niet alle details van het proces goed begrepen maar de kern van het proces is de absorptie van licht door zogenaamde collectieve elektron-oscillaties van de metalen nanodeeltjes. Het systeem wordt een plasmonische stoomgenerator genoemd.



Figuur 2.1(a) Een bolvormig ongeladen nanodeeltje met straal R . Het middelpunt is de oorsprong van het coördinatensysteem. **(b)** Een bol met een homogene positieve ladingsdichtheid ρ (rood), en daarin een kleiner ongeladen bolvormig gedeelte (0, geel) met straal R_1 , en het middelpunt in $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$. **(c)** De bol met een positieve ladingsdichtheid ρ van het zilveren nanodeeltje blijft in de oorsprong van het coördinatensysteem. Het middelpunt van het bolvormige gebied met negatieve ladingsdichtheid $-\rho$ (blauw) van de elektronenwolk wordt verschoven over een afstand x_p , met $x_p \ll R$. **(d)** Een uitwendig homogeen elektrisch veld $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$. Voor tijdsafhankelijke \mathbf{E}_0 beweegt de elektronenwolk met snelheid $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. **(e)** De rechthoekige doos ($h \times h \times a$) met daarin de waterige oplossing van nanodeeltjes wordt verlicht door monochromatisch licht in de z richting. Het licht heeft een hoekfrequentie ω_p en intensiteit S .

Een enkel bolvormig zilveren nanodeeltje

In deze opgave beschouwen we een bolvormig zilveren nanodeeltje met een straal $R = 10.0$ nm en met het middelpunt in de oorsprong van het coördinatensysteem, zie Fig. 2.1(a). Alle bewegingen, krachten en aandrijvende velden zijn evenwijdig met de horizontale x -as (met eenheidsvector \mathbf{e}_x). Het nanodeeltje bevat vrije (geleidings)elektronen die door het hele nanodeeltje kunnen bewegen zonder gebonden te zijn aan een enkel zilveratoom. Elk zilveratoom is een positief ion dat één zo'n vrij elektron heeft afgegeven.

2.1	Bereken de volgende grootheden: Het volume V en massa M van het nanodeeltje, het aantal N en de ladingsdichtheid ρ van zilverionen in het deeltje, en voor de vrije elektronen hun concentratie n , hun totale lading Q , en hun totale massa m_0 .	0.7
-----	--	-----

Het elektrisch veld in een ladingsneutraal gedeelte in een geladen bol

Ga er bij de rest van de opgave vanuit dat de relatieve dielectrische permittiviteit van alle materialen gelijk is aan $\epsilon = 1$. Binnen een geladen bol met homogene ladingsdichtheid ρ en straal R is één klein ladingsneutraal bolvormig gedeelte gemaakt met straal R_1 door een tegengestelde ladingsdichtheid $-\rho$ toe te voegen, waarvan het middelpunt verplaatst is met $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$, vanaf het middelpunt van de R -bol, zie figuur 2.1(b).

2.2	Toon aan dat het elektrisch veld binnen in de ladingneutrale bol homogeen is en de volgende vorm heeft: $E = A (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_d$, en bepaal de factor A .	1.2
-----	--	-----

De teruggedrijvende kracht op de verplaatste elektronenwolk

Vanaf nu bestuderen we de gezamenlijke beweging van de vrije elektronen, en beschouwen hen daarom als één negatief geladen bol met homogene ladingsdichtheid $-\rho$ met de oorsprong op positie \mathbf{x}_p . Deze bol kan bewegen langs de x -as ten opzichte van het middelpunt van de positief geladen bol (zilverionen) dat vast zit aan de oorsprong van het coördinatensysteem, zie figuur 2.1 (c). Neem aan dat een externe kracht \mathbf{F}_{ext} de elektronenwolk verplaatst naar een nieuwe evenwichtsstand $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$ met $|x_p| \ll R$. Behalve voor kleine nettoladingen aan de twee uiteinden van het nanodeeltje, blijft het grootste deel van het inwendige van het nanodeeltje ladingneutraal.

2.3	Druk de volgende twee grootheden uit in termen van \mathbf{x}_p en n : de teruggedrijvende kracht \mathbf{F} op de elektronenwolk en de arbeid W_{el} die daarbij op de elektronenwolk wordt verricht.	1.0
-----	---	-----

Het bolvormige zilveren nanodeeltje in een uitwendig constant elektrisch veld

Een nanodeeltje is geplaatst in vacuüm en ondervindt invloed van een uitwendige kracht \mathbf{F}_{ext} veroorzaakt door een statisch homogeen elektrisch veld $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$, die de elektronenwolk verplaatst over een kleine afstand $|x_p|$, met $|x_p| \ll R$.

2.4	Bereken de verplaatsing x_p van de elektronenwolk in termen van E_0 en n en bepaal de hoeveelheid elektronlading $-\Delta Q$ die verplaatst is door het yz -vlak in het midden van het nanodeeltje in termen van n , R en x_p .	0.6
-----	---	-----

De effectieve capaciteit en inductie van het zilveren nanodeeltje

Zowel voor een constant als voor een tijdsafhankelijk veld \mathbf{E}_0 kan je het nanodeeltje beschouwen als een soort elektrisch circuit met een capaciteit en een inductie. De effectieve capaciteit kan gevonden worden door de arbeid W_{el} , geleverd om de ladingen $\pm\Delta Q$ te scheiden, te vergelijken met

de energie van een condensator met lading $\pm\Delta Q$. De ladingsscheiding veroorzaakt een bepaalde effectieve spanning V_0 over deze condensator.

2.5a	Druk de effectieve capaciteit C van het systeem uit in ε_0 en R , en bepaal zijn waarde.	0.7
2.5b	Geef voor deze capaciteit de effectieve spanning V_0 (die aan de effectieve capaciteit moet worden verbonden om de lading ΔQ daarop te verzamelen) in termen van E_0 en R .	0.4

Met een tijdsafhankelijk veld E_0 beweegt de elektronenwolk met een snelheid $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, zie Fig. 2.1(d). Deze wolk heeft kinetische energie W_{kin} en zorgt zo voor een elektrische stroom I die door het yz -vlak stroomt. De kinetische energie van de elektronenwolk kun je toeschrijven aan de energie van een spoel met effectieve zelfinductie L en stroomsterkte I .

2.6a	Druk zowel W_{kin} als I uit in termen van de snelheid v .	0.7
2.6b	Druk de effectieve zelfinductie L uit in termen van de straal van het deeltje R , de elektronlading e en de massa m_e , de elektronconcentratie n , en bereken zijn waarde.	0.5

De plasmonresonantie van het zilveren nanodeeltje

De bovenstaande analyse toont aan dat de beweging, die ontstaat door het verplaatsen van de elektronenwolk vanuit zijn evenwichtspositie en dan los te laten, kan worden beschouwd als een ideaal LC -circuit, dat oscilleert bij resonantie. Deze dynamische mode van de elektronenwolk is bekend als de plasmonresonantie, die oscilleert met de zogeheten plasmon hoekfrequentie ω_p .

2.7a	Geef een uitdrukking voor de plasmon hoekfrequentie ω_p uitgedrukt in de elektronlading e en massa m_e , de elektrondichtheid n en de permittiviteit ε_0 .	0.5
2.7b	Bereken ω_p in rad/s en de golflengte λ_p in nm van licht in vacuüm met hoekfrequentie $\omega = \omega_p$.	0.4

Het zilveren nanodeeltje belicht met licht met de plasmonfrequentie

In de rest van de opgave wordt het nanodeeltje belicht door monochromatisch licht met de plasmon hoekfrequentie ω_p met de intensiteit $S = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$. Als de golflengte groot is, $\lambda_p \gg R$, mag je aannemen dat het nanodeeltje in een homogeen oscillerend veld is geplaatst met $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$. Aangedreven door \mathbf{E}_0 , oscilleert het centrum $\mathbf{x}_p(t)$ van de elektronenwolk bij dezelfde frequentie met snelheid $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ en constante amplitude x_0 . Deze trilling van de elektronen zorgt ervoor dat licht wordt geabsorbeerd. De energie die door het deeltje wordt opgenomen, wordt hetzij omgezet in weerstandswarmte binnen in het deeltje, hetzij opnieuw uitgezonden door het deeltje als teruggekaatst licht.

Weerstandswarmte wordt veroorzaakt door willekeurige inelastische botsingen, waarbij elk vrij elektron af en toe een zilverion raakt en daarbij zijn totale kinetische energie verliest. Die kinetische energie wordt omgezet in trillingen van de zilverionen (warmte). De gemiddelde tijd tussen de botsingen is $\tau \gg 1/\omega_p$, waarbij we voor het zilveren nanodeeltje een tijd gebruiken van $\tau = 5.24 \times 10^{-15} \text{ s}$.

2.8a	Geef zowel een uitdrukking voor het tijdgemiddelde weerstandswarmtevermogen P_{heat} in het nanodeeltje, als voor het tijdgemiddelde kwadraat van de stroomsterkte $\langle I^2 \rangle$ waarin uitdrukkelijk de tijdgemiddelde grootte van het kwadraat van de snelheid $\langle v^2 \rangle$ van de elektronenwolk voorkomt.	1.0
2.8b	Geef een uitdrukking voor de effectieve ohmse weerstand R_{heat} in een effectief weerstandsmodel van het nanodeeltje dat weerstandswarmtevermogen P_{heat} heeft als gevolg van de stroom I door elektronenwolk. Bereken de grootte van R_{heat} .	1.0

De invallende lichtbundel verliest over de tijd gemiddeld een vermogen P_{scat} door reflectie aan de elektronenwolk (opnieuw uitgezonden). P_{scat} hangt af van de amplitude x_0 van de weerkaatsingsbron, de lading Q , de hoekfrequentie ω_p en van de eigenschappen van het licht (de snelheid van het licht c en de permittiviteit ϵ_0 in vacuüm). Uitgedrukt in deze vier variabelen kun je P_{scat} schrijven als $P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$.

2.9	Geef, door P_{scat} te gebruiken, een uitdrukking van de effectieve terugkaatsingsweerstand R_{scat} (in analogie met R_{heat}) in een effectief weerstandsmodel, en bereken zijn waarde.	1.0
-----	---	-----

De bovenstaande elementen van een elektrisch circuit worden gecombineerd tot een circuit met LCR in serie als een model van het zilveren nanodeeltje, aangedreven met een effectieve harmonische spanning $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ die bepaald wordt door het elektrische veld E_0 van het invallende licht.

2.10a	Geef uitdrukkingen voor de over de tijd gemiddelde vermogensverliezen P_{heat} en P_{scat} bij de plasmonresonantiefrequentie $\omega = \omega_p$, uitgaande van de amplitude E_0 van het elektrisch veld van het invallende licht.	1.2
2.10b	Bereken de waarde van E_0 , P_{heat} , en P_{scat} .	0.3

Stoom maken met licht

We nemen een waterige oplossing van zilveren nanodeeltjes met een concentratie $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$. We plaatsen deze in een rechthoekige transparante container met afmetingen $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$. We verlichten deze met licht met de plasmonfrequentie met dezelfde

intensiteit $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$ en loodrechte inval, zie figuur 2.1 (e). De temperatuur van het water is $T_{\text{wa}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ en we nemen aan, zoals observaties ook laten zien, dat bij dynamisch evenwicht alle weerstandswarmte van het nanodeeltje gebruikt wordt voor de productie van stoom met een temperatuur van $T_{\text{st}} = 110 \text{ }^\circ\text{C}$, zonder dat de temperatuur van het water stijgt.

De thermodynamische efficiëntie η van de plasmonische stoomgenerator wordt gedefinieerd door de vermogensverhouding $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$, waarbij P_{st} het vermogen is, dat in de productie van stoom in de gehele container gaat zitten, en P_{tot} het totale vermogen is van het licht dat de container inkomt.

Over het algemeen kun je ervan uitgaan dat een nanodeeltje voor het grootste deel van de tijd met stoom is omringd in plaats van met water, en je mag het daarom als in vacuüm veronderstellen.

2.11a	Bereken de totale massa per seconde μ_{st} stoom die wordt geproduceerd door de plasmonische stoomgenerator als deze wordt belicht met licht met de plasmonfrequentie met intensiteit S .	0.6
2.11b	Bereken de waarde van de thermodynamische efficiëntie η van de plasmonische stoomgenerator.	0.2

Antwoordblad

Landencode (2 letters)

Studentnummer (1-5)

2.1	Volume $V =$ Aantal $N =$ Concentratie $n =$ Totale massa van de elektronen $m_0 =$	Massa $M =$ Ladingsdichtheid $\rho =$ Lading $Q =$	0.7
2.2	Toon aan dat $\mathbf{E}_{\text{ind}} = A (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_p$, metvoor-factor $A =$		1.2
2.3	$\mathbf{F} =$	$W_{\text{el}} =$	1.0
2.4	Verplaatsing $x_p =$	Verplaatste lading $-\Delta Q =$	0.6
2.5a	Uitdrukking voor $C =$	Waarde van $C =$	0.7
2.5b	Uitdrukking voor $V_0 =$		0.4
2.6a	Uitdrukking voor $W_{\text{kin}} =$	Uitdrukking voor $I =$	0.7
2.6b	Uitdrukking voor $L =$	Waarde van $L =$	0.5
2.7a	Uitdrukking voor $\omega_p =$		0.5
2.7b	Waarde van $\omega_p =$	Waarde van $\lambda_p =$	0.4
2.8a	Uitdrukking voor $P_{\text{heat}} =$	Uitdrukking voor $\langle I^2 \rangle =$	1.0
2.8b	Uitdrukking voor $R_{\text{heat}} =$	Waarde van $R_{\text{heat}} =$	1.0
2.9	Uitdrukking voor $R_{\text{scat}} =$	Waarde van $R_{\text{scat}} =$	1.0
2.10a	Uitdrukking voor $P_{\text{heat}} =$	Uitdrukking voor $P_{\text{scat}} =$	1.2
2.10b	Waardes: $E_0 =$, $P_{\text{heat}} =$, $P_{\text{scat}} =$		0.3
2.11a	Waarde van $\mu_{\text{st}} =$		0.6
2.11b	Waarde van $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}} =$		0.2
	Totaal		12.0

Introductie

Dit vraagstuk gaat over de fysica van de Groenlandse ijskap, de tweede grootste gletsjer ter wereld, zie Fig. 3.1(a). Groenland is bij ruwe benadering te modelleren als een rechthoekig eiland met breedte $2L$ en lengte $5L$. De grond is op zeespiegelhoogte en het eiland is volledig bedekt met niet samendrukbaar ijs (met constante dichtheid ρ_{ice}), see Fig. 3.1(b). Het hoogte profiel $H(x)$ van de ijskap hangt niet af van de y -coördinaat en neemt toe vanaf nul aan de kusten $x = \pm L$ tot een maximum hoogte H_m langs noord-zuid as in het midden (de y -as), ook wel bekend als de ijscheidingslijn (ice divide), zie Fig. 3.1(c).

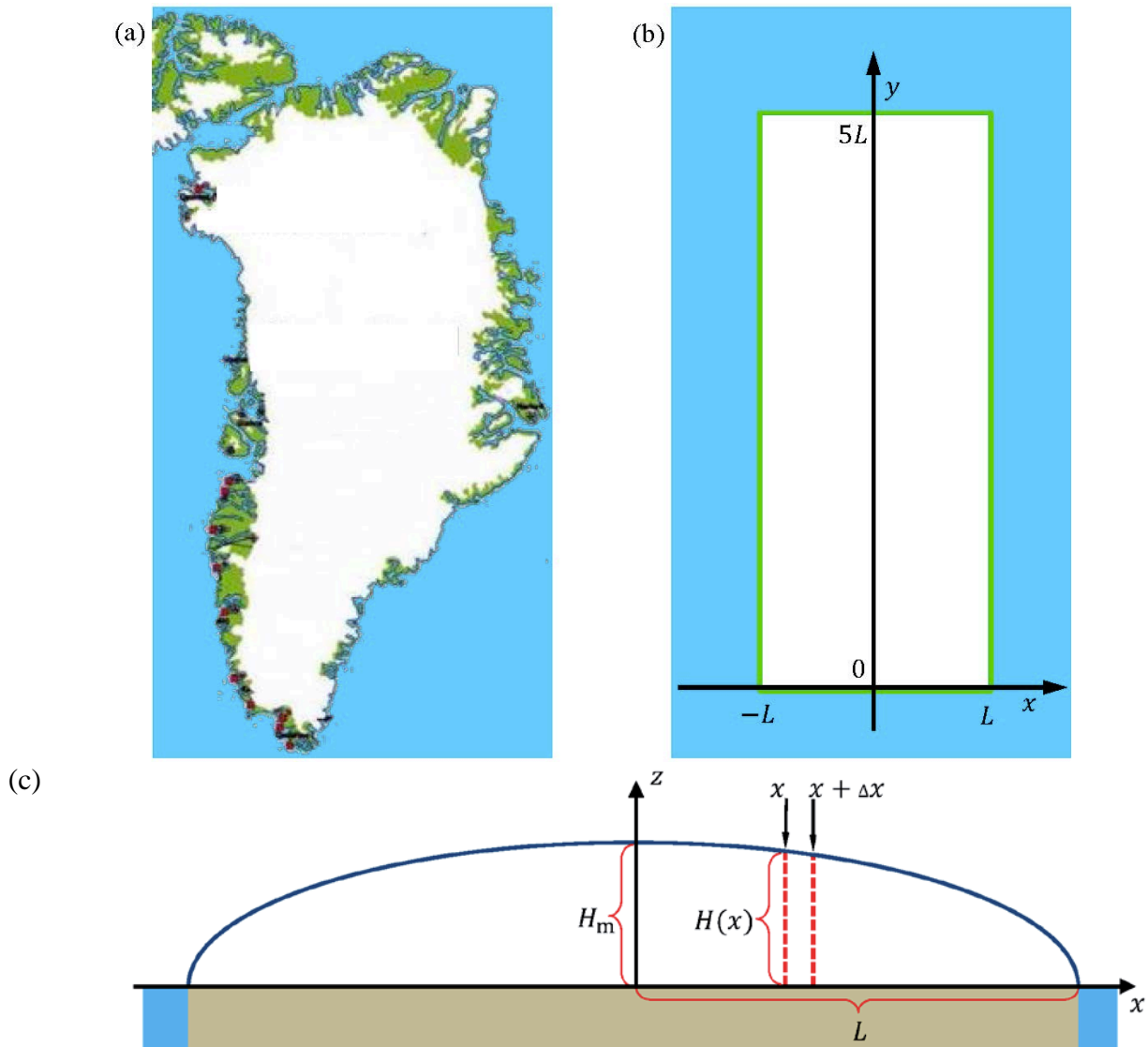


Figure 3.1 (a) Een kaart van Groenland. Deze geeft de omvang aan van de ijskap (wit), de ijs-vrije, kustgebieden (groen), en de omliggende oceaan (blauw). (b) Het ruwe model van de Groenlandse ijskap: het ijs bedekt een rechthoekig gebied in het xy -vlak met zijden van $2L$ and $5L$. De ijscheidingslijn (ice divide), de lijn van maximale ijshoogte H_m loopt langs de y -as. (c) Een verticale dwarsdoorsnede (xz -plane) van de ijskap geeft het hoogteprofiel $H(x)$ (blauwe lijn). $H(x)$ is onafhankelijk van de y -coördinaat voor $0 < y < 5L$, en neemt abrupt tot nul af bij $y = 0$ en $y = 5L$. De z -as geeft de positie van de ijscheidingslijn (ice divide). Voor alle duidelijkheid zijn de verticale dimensies uitvergroot vergeleken met de horizontale dimensies. De dichtheid ρ_{ice} van ijs is constant.

Twee nuttige formules

In dit vraagstuk kun je gebruik maken van de integraal:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

en de benadering $(1+x)^a \approx 1+ax$, geldig voor $|ax| \ll 1$.

Het hoogteprofiel van de ijskap

Op kleine tijdschaal is de gletsjer een niet samendrukbaar hydrostatisch systeem met een vast hoogteprofiel $H(x)$.

3.1	Geef een uitdrukking voor de druk $p(x, z)$ in de ijskap als een functie van de verticale hoogte z boven the grond en afstand x van de ijsscheidingslijn (ice divide). Verwaarloos hierbij de atmosferische druk.	0.3
-----	---	-----

Beschouw een verticale plak van de ijskap in evenwicht. Deze plak bedekt een klein horizontaal grondvlak $\Delta x \Delta y$ tussen x en $x + \Delta x$, zie de rode stippellijn in Fig. 3.1(c). De grootte van Δy is niet van belang. De netto horizontale krachtcomponent ΔF op de twee verticale zijden van de plak, veroorzaakt door het verschil in hoogte van de centrum-kant versus de kust-kant van de plak is in evenwicht met een wrijvingskracht $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ van de grond op het grondvlak $\Delta x \Delta y$, met $S_b = 100$ kPa.

3.2a	Laat zien dat voor een gegeven waarde van x , in de limiet voor $\Delta x \rightarrow 0$ geldt $S_b = kH dH/dx$ en bereken k .	0.9
3.2b	Leid een vergelijking af voor het hoogteprofiel $H(x)$ in termen van ρ_{ice} , g , L , S_b en de afstand x vanaf de ijsscheidingslijn. Het resultaat laat zien dat de maximale gletsjerhoogte H_m evenredig is met de wortel van de halve breedte L : $H_m \propto L^{1/2}$.	0.8
3.2c	De relatie tussen het totale volume V_{ice} van de ijskap en het oppervlakte A van het rechthoekige eiland kan geschreven worden als $V_{ice} \propto A^\gamma$. Bereken de exponent γ .	0.5

Een dynamische ijskap

Op grotere tijdschaal is het ijs een viskeuze onsamendrukbare vloeistof, die door de zwaartekracht van het centrale gedeelte naar de kust stroomt. In dit model houdt het ijs het hoogteprofiel $H(x)$ door een dynamisch evenwicht. De toename van ijs vanwege sneeuwval in het centrale gebied is in evenwicht met het smelten aan de kust. Maak als toevoeging op de ijskap geometrie van Fig. 3.1(b) en (c) de volgende aannames:

- 1) Ijs stroomt parallel aan de x -as weg van de ijsscheidingslijn (de y -as).
- 2) De sneeuwval per jaar (accumulation rate) c (m/jaar) in het centrale gebied is constant.
- 3) Ijs kan alleen de gletsjer verlaten door te smelten bij de kust op $x = \pm L$.
- 4) De horizontale (x -)component $v_x(x) = dx/dt$ van de ijs-stroom snelheid is onafhankelijk van z .
- 5) De verticale (z -)component $v_z(z) = dz/dt$ van de ijs-stroom snelheid is onafhankelijk van x .

Beschouw alleen het centrale gebied $|x| \ll L$ dicht bij het midden van de ijskap, waar de hoogte variaties van de ijskap erg klein zijn en verwaarloosd kunnen worden, d.w.z. $H(x) \approx H_m$.

3.3	Leid een vergelijking af voor de horizontale ijs-stroom snelheid $v_x(x)$ in termen van c , x , and H_m . Maak hierbij gebruik van behoud van massa.	0.6
-----	--	-----

Uit de aanname van onsamendrukbaarheid, oftewel de constante dichtheid van ijs, volgt dat behoud van massa de volgende restricties impliceert in de ijsstroom snelheidscomponenten:

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Leid een uitdrukking af voor de z afhankelijkheid van de verticale component $v_z(z)$ van de ijs-stroom snelheid.	0.6
-----	---	-----

Een klein ijsdeeltje met initiële oppervlak positie (x_i, H_m) zal, in verloop van de tijd, stromen als onderdeel van de ijskap langs een stroomtraject $z(x)$ in het verticale xz -vlak.

3.5	Leid een uitdrukking af voor een dergelijk stroom traject $z(x)$.	0.9
-----	--	-----

Ouderdoms en klimaat indicatoren in de dynamische ijskap

Gebaseerd op de ijs- stroom snelheidscomponenten $v_x(x)$ en $v_z(z)$, kan een schatting gemaakt worden van de ouderdom $\tau(z)$ van het ijs op een specifieke diepte $H_m - z$ vanaf het oppervlak van de ijskap.

3.6	Leid een vergelijking af voor de ouderdom $\tau(z)$ van het ijs als een functie van de hoogte z boven de grond, op de ijsscheidingslijn $x = 0$.	1.0
-----	---	-----

Een ijskern wordt uit het binnenste van de Groenlandse ijskap geboord. Hierbij zal door lagen sneeuw uit het verleden geboord worden. De ijskern kan geanalyseerd worden om daarmee klimaat veranderingen uit het verleden te ontdekken.

Een van de beste indicatoren is de zogenaamde $\delta^{18}\text{O}$, deze is gedefinieerd als:

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{‰},$$

Hierbij geeft $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ de relatieve overvloed van de twee stabiele isotopen van zuurstof ^{18}O and ^{16}O . De referentie R_{ref} is gebaseerd op the isotopische compositie van de oceanen rond de equator.

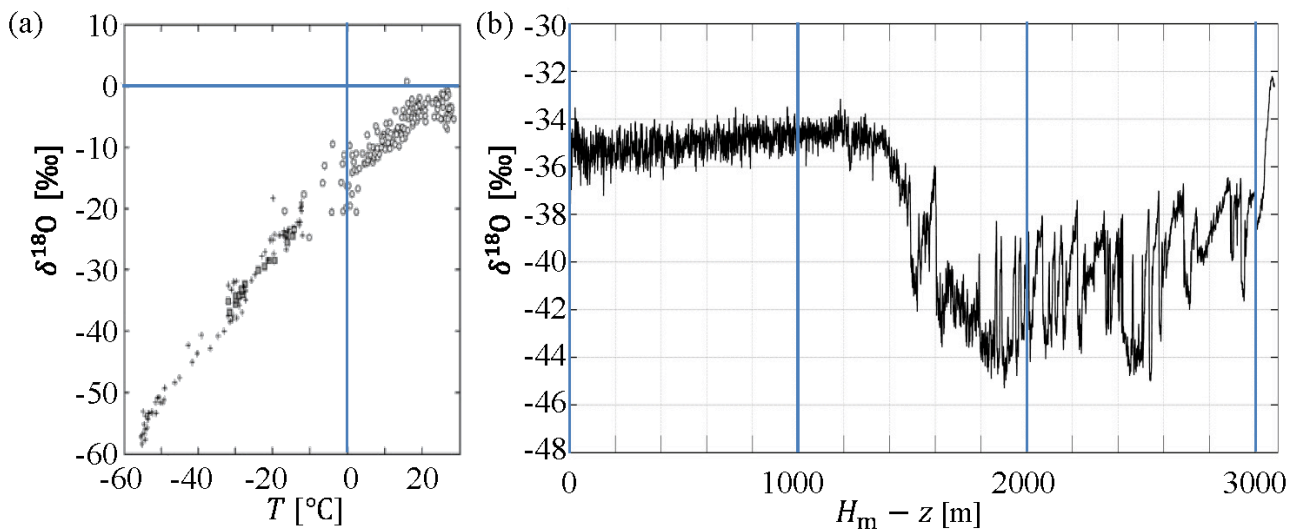


Figure 3.2 (a) Waargenomen verhouding tussen $\delta^{18}\text{O}$ in sneeuw versus de gemiddelde jaarlijkse oppervlak temperatuur T . **(b)** Metingen van $\delta^{18}\text{O}$ versus diepte $H_m - z$ vanaf het oppervlak, genomen van een ijskern die geboord is van het oppervlak tot de grondlaag op een specifieke plaats op de Groenlandse ijscheidingslijn waarbij $H_m = 3060$ m.

Observaties van het Groenlandse ijs laten zien dat $\delta^{18}\text{O}$ in de sneeuw varieert ongeveer lineair met de temperatuur, zie Fig. 3.2(a). Als aangenomen wordt dat dit altijd het geval is, dan zal $\delta^{18}\text{O}$ verkregen uit een ijskern van diepte $H_m - z$ een schatting kunnen geven van de temperatuur T nabij Groenland voor ouderdom $\tau(z)$.

Metingen van $\delta^{18}\text{O}$ in een 3060 m lange Groenlandse ijskern laten een abrupte verandering zien in $\delta^{18}\text{O}$ at a depth of 1492 m, zie Fig. 3.2(b). Dit geeft het einde aan van de laatste ijstijd. Deze ijstijd begon 120,000 jaar geleden; dit correspondeert met een diepte van 3040 m. Het huidige interglaciale tijdperk begon 11,700 jaar geleden; dit correspondeert met een diepte van 1492 m. Neem aan dat deze twee periodes beschreven kunnen worden door twee verschillende waarden voor de sneeuwval per jaar (accumulation rates), resp. c_{ia} (ice age) en c_{ig} (interglacial age).

3.7a	Bepaal de waarden voor de sneeuwval per jaar (accumulation rates) c_{ia} and c_{ig} .	0.8
3.7b	Gebruik de data in Fig. 3.2 om de temperatuursverandering te vinden tijdens de overgang van de ijstijd naar het interglaciale tijdperk.	0.2

Zeespiegelstijging door het smelten van de Groenlandse IJskap

Als de Groenlandse IJskap volledig smelt, zal de zeespiegel van de globale oceaan stijgen. Een ruwe schatting van deze stijging van de zeespiegel kan gedaan worden door uit te gaan van een uniforme stijging van een oceaan met een constante oppervlakte van $A_G = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

3.8	Bereken de gemiddelde globale stijging van de zeespiegel als de Groenlandse IJskap volledig zou smelten, als gegeven is dat de huidige oppervlakte $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ bedraagt en $S_b = 100 \text{ kPa}$.	0.6
-----	--	-----

De massieve Groenlandse IJskap oefent een (aantrekkende) zwaartekracht uit op de omringende oceaan. Als het ijs smelt, zal dit plaatselijke ‘hoogwater’ verdwijnen en zal de zeespiegel bij Groenland dus lager worden. Dit is een effect die de eerdergenoemde zeespiegelstijging gedeeltelijk tegenwerkt.

Om de orde van grootte van de (aantrekkende) zwaartekracht op het water te bepalen, wordt de Groenlandse IJskap gemodelleerd als een puntmassa op grondniveau met de totale massa van de Groenlandse IJskap.

Kopenhagen ligt op een afstand van 3500 km van de puntmassa, gemeten langs het Aardoppervlak. Je mag de Aarde zonder puntmassa bolvormig symmetrisch beschouwen met de oceaan gelijkmatig over het hele Aardoppervlak uitgespreid. De Aarde heeft een oppervlak van $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{m}^2$. Alle effecten die met de rotatie van de Aarde te maken hebben, mogen worden verwaarloosd.

3.9	Bepaal met dit model het verschil $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}}$; het verschil in zeespiegelhoogte van Copenhagen (h_{CPH}) en diametraal tegenover Groenland (h_{OPP}).	1.8
-----	--	-----

Antwoordblad

Landencode (2 letters)

Studentnummer(1 -5)

3.1	$p(x, z) =$	0.3
3.2a	$k =$	0.9
3.2b	$H(x) =$	0.8
3.2c	$\gamma =$	0.5
3.3	$v_x(x) =$	0.6
3.4	$v_z(z) =$	0.6
3.5	$z(x) =$	0.9
3.6	Ouderdom van het ijs op een bepaalde afstand boven de grond: $\tau(z) =$	1.0
3.7a	$c_{ia} =$ $c_{ig} =$	0.8
3.7b	$\Delta T =$	0.2
3.8	Globale stijging van de zeespiegel door het smelten van ijs op Groenland =	0.6
3.9	Vershil in zeespiegel hoogte: $h_{CPH} - h_{OPP} =$	1.8
	Total	9.0