De 39e Internationale Natuurkunde Olympiade

Theorie-toets

Dinsdag 22 juli 2008

Lees dit eerst!

1. Voor de theorietoets is 5 uur beschikbaar. Er zijn 3 vraagstukken die elk 10 punten waard zijn.

2. Gebruik uitsluitend de door de organisatie ter beschikking gestelde pen.

3. Beschrijf uitsluitend de voorkant van het papier.

4. De ***antwoordbladen*** MOETEN gebruikt worden om de antwoorden op samen te vatten. Er zijn ook ***blanco bladen*** waar je op mag schrijven. Geef numerieke resultaten weer met een verantwoord aantal significante cijfers. ***Vergeet ook niet om de eenheid te geven.***

5. Op de blanco bladen mag je uiteraard alles schrijven waarvan je denkt dat het belangrijk is voor het oplossen van het vraagstuk en dat je wil laten meetellen in de beoordeling. Gebruik echter zoveel mogelijk vergelijkingen, numerieke waarden, tekeningen en grafieken. Gebruik dus ***zo weinig mogelijk tekst***.
6. Bovenaan elk antwoordblad MOET je je **Student Code** invullen. Vul tevens op de blanco bladen in: het nummer van de opgave (**Vraag Nummer**); het paginanummer en het totaal aantal blanco bladen dat je hebt gebruikt en dat nagekeken moet worden. Noteer ook aan het begin van elk blad het nummer en het onderdeel van de vraag waarmee je bezig bent. Zet een kruis door alle andere beschreven bladen die niet nagekeken hoeven te worden. Neem deze bladen ook niet op in de nummering van de bladen.
7. Leg aan het eind alle bladen in de *juiste volgorde*:
   - **per vraagstuk** eerst het *antwoordblad*,
   - daarna de *beschreven bladen* die nagekeken moeten worden en
   - dan die niet nagekeken hoeven te worden,
   - en dan de gedrukte opgaven onderaan.
   - Stop de bladen per vraagstuk in de daarvoor bestemde envelop: vraagstuk 1, 2 en 3 resp. in de enveloppen M3A, M3B en M3C. Stop te samen met de ongebruikte bladen in de envelop M2 laat alles op je tafel achter. ***Je mag geen bladen meenemen.***

EEN DOOR WATER AANGEDREVEN MORTIER EN VIJZEL (RIJSTSTAMPER)

A. Introductie

Rijst is het hoofd voedingsbestanddeel van de meeste mensen in Vietnam. Om witte rijst uit paddie te verkrijgen, moet men eerst het kaf ervan afhalen en daarna het zilvervlies.

De heuvelachtige gebieden van noord Vietnam zijn overvloedig voorzien van beekjes met stromend water. De mensen die daar wonen maken gebruik van *door water aangedreven mortier en vijzel* (*rijststamper*) voor het verwijderen van de zilvervlies laag. Figuur 1 toont zo'n apparaat; Figuur 2 toont hoe het werkt.

B. Ontwerp en werking

1. Ontwerp.

Het apparaat in Figuur 1 heeft de volgende onderdelen:

De vijzel, in principe een houten bak voor rijst.

De hefboom, een boomstam met een dikke en een dunne zijde. Het kan om een horizontale as roteren. Een stamper is loodrecht op de hefboom bevestigd aan de dunne zijde. De lengte van de stamper is zodanig dat deze de rijst in de vijzel raakt wanneer de hefboom horizontal staat. De dikke zijde van de hefboom is uitgehold om een opslagbak te vormen. De vorm van deze bak is bepalend voor de werking van de stamper.

2. Toestanden waarin de stamper kan opereren

Er zijn twee toestanden.

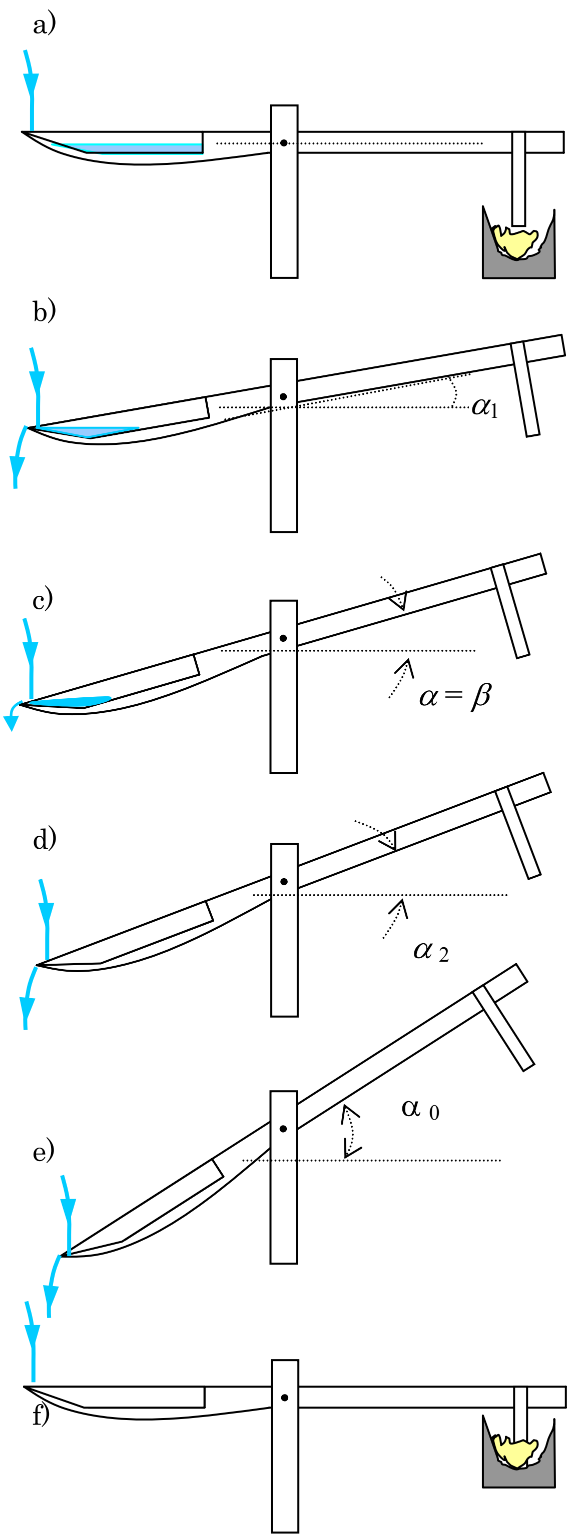
Werkende toestand. In deze toestand doorloopt de mortier een cyclus zoals aangegeven in Figuur 2.

Het stampen van de rijst is mogelijk doordat energie van de stamper overgedragen wordt aan de rijst gedurende fase (f) van Figuur (2). Als, om een of andere reden, de stamper de rijst niet raakt , zeggen we dat het apparaat niet werkt.

*Rusttoestand met de hefboom omhoog gericht***.** Tijdens fase (c) van de werkingcyclus (zie Figuur 2), als de hellingshoek α toeneemt, neemt de hoeveelheid water in de bak af. Op een bepaald tijdstip is de hoeveelheid water net genoeg om in evenwicht te zijn met het gewicht van de hefboom. Noem de hellingshoek op dit tijdstip β. Als de hefboom geplaatst wordt onder een hoek β en de beginhoeksnelheid is nul,dan blijft de hefboom voor altijd in deze stand staan. Dit is de rust toestand met de omhooggerichte hefboom. De stabiliteit van deze toestand hangt af van de hoeveelheid water per seconde Φ (het debiet) die in de bak stroomt. Als Φ een bepaalde waarde Φ_2 overschrijdt, dan is deze rusttoestand stabiel en kan het apparaat niet in de werkende toestand komen. Met andere woorden, Φ_2 is het minimale debiet waarbij het apparaat niet werkt.

Figuur 1
Een water aangedreven rijststamper

WERKINGSCYCLUS VAN EEN WATER AANGEDREVEN RIJSTSTAMPER



a) In het begin is er geen water in de opvangbak en de stamper rust op de vijzel. Water stroomt in de bak met een klein debiet. Toch blijft de hefboom voor enige tijd in horizontale positie

b) Op een bepaald moment is de hoeveelheid water voldoende om de hefboom te doen kantelen. Dankzij deze kanteling, stroomt het water snel naar de kant van de bak die het verst van de draaias is, terwijl de hefboom nog sneller kantelt. Het water begint uit de bak te stromen bij een hoek $\alpha = \alpha_1$.

c) Als de hoek α toeneemt, begint het water uit te stromen. Bij een bepaalde kantelhoek, $\alpha = \beta$, zal het totale krachtmoment gelijk aan nul zijn.

d) α blijft toenemen, het water blijft uit de bak stromen tot er geen water meer in de bak is.

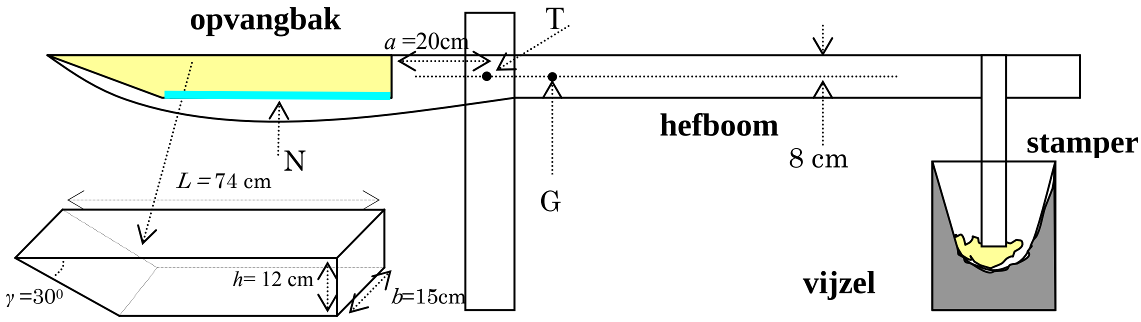
e) α blijft nog steeds toenemen als gevolg van de traagheid. Vanwege de vorm van de opvangbak, valt water in de bak maar stroomt er onmiddelijk weer uit. Door de traagheid blijft de beweging voortduren totdat α de maximale waarde α_0 bereikt heeft.

f) Zonder water in de bak beweegt de hefboom door haar eigen gewicht weer naar de horizontale positie. De stamper geeft de vijzel (met rijst erin) een klap en een nieuwe cyclus begint.

C. Het vraagstuk

Bekijk een door water aangedreven rijststamper met de volgende parameters (Figuur 3)

- De massa van de hefboom (inclusief stamper maar zonder water in de opvangbak) is $M = 30$ kg,
- Het zwaartepunt van de hefboom is G. De hefboom draait om as T (zie figuur)
- Het traagheidsmoment van de hefboom ten opzichte van as T is $I = 12\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.
- Wanneer er water (massa *m*) in de opvangbak is, wordt het zwaartepunt van het water aangegeven door *N*.
- De kantelhoek van de hefboom ten opzichte van de horintale as is α.
- De belangrijke afmetingen van de opvangbak en hefboom zijn gegeven in Figuur 3. De afmetingen van de opvangbak zijn 3 dimensionaal weergegeven.
- Verwaarloos wrijving door rotatie om de as en de kracht ten gevolge van het vallende water op de opvangbak. In dit probleem doen we de aanname dat het wateroppervlak altijd horizontaal is.



Figuur 3. Ontwerp en afmetingen van de rijststamper

1. De structuur van de vijzel

In het begin is de opvangbak leeg en staat de hefboom horizontaal. Dan stroomt water in de opvangbak totdat de hefboom begint te roteren. De hoeveelheid water in de opvangbak op dat moment is $m = 1{,}0$ kg.

1.1. Bepaal de afstand van het zwaartepunt G van de hefboom tot de roatie-as T. GT staat horizontaal als de opvangbak leeg is.

1.2. Water begint uit de opvangbak te stromen op het moment dat de hoek tussen de hefboom en de horizontaal de waarde α_1 bereikt. De opvangbak is helemaal leeg wanneer deze hoek gelijk is aan α_2. Bepaal α_1 en α_2.

1.3. $\mu(\alpha)$ is het totale krachtmoment (ten opzichte van as T) veroorzaakt door het gewicht van de hefboom en het water in de opvangbak. $\mu(\alpha)$ is nul als $\alpha = \beta$. Bepaal β en de massa m_1 van het water in de opvangbak op dat moment.

2. Parameters van de werkende toestand

Neem aan dat het water in de opvangbak stroomt met een debiet Φ. Dit debiet is constant en klein. De hoeveelheid water die in de opvangbak stroomt wanneer de hefboom in beweging is kan verwaarloosd worden. Verwaarloos in dit gededeelte de verandering van het traagheidsmoment gedurende de werkingsscyclus.

2.1. Schets een grafiek van het krachtmoment $\mu(\alpha)$ als functie van de hoek α, gedurende één werkingsscyclus. Geef expliciet de waarden van $\mu(\alpha)$ voor de hoeken α_1, α_2 en $\alpha = 0$.

2.2. Bediscussieer en geef de geometrische interpretatie van de totale energie W_{totaal} geleverd door $\mu(\alpha)$ en de arbeid $W_{stamper}$ die de stamper verricht op de rijst.

2.3. Maak aan de hand van de grafiek van μ als functie van α een schatting van α_0 en $W_{stamper}$ (veronderstel dat de kinetische energie van water dat opvangbak in- en uitstroomt verwaarloosbaar klein.) Gekromde lijnen mag je benaderen door gebroken lijnen als dat de berekening vereenvoudigt.

3. De rusttoestand

Stel dat het water in de opvangbak stroomt met een constant debiet Φ, maar nu is de hoeveelheid water die in de bak stroomt gedurende het bewegen van de hefboom niet meer te verwaarlozen.

3.1. Neem aan dat de opvangbak voortdurend overstroomt,

3.1.1. Maak een grafiek van het krachtmoment μ als functie van de hoek α voor waarden van α in de buurt van β. Met wat voor soort evenwicht correspondeert de positie $\alpha = \beta$ van de hefboom?

3.1.2. Bepaal de functie van het krachtmoment $\mu(\Delta\alpha)$ als functie van $\Delta\alpha$ met $\alpha = \beta + \Delta\alpha$, en $\Delta\alpha$ is klein.

3.1.3. Schrijf de bewegingsvergelijking van de hefboom op als deze met beginsnelheid nul beweegt vanaf positie $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ is klein). Laat zien dat de beweging in goede benadering een harmonische trilling is.

3.2. Bij een bepaalde waarde van het debiet Φ stroomt de opvangbak voortdurend over als de hefboom voldoende langzaam beweegt. Er is een maximum waarde van de amplitude van de harmonische trilling die afhangt van de waarde van Φ. Bepaal de minimale waarde Φ_1 van Φ (in kg/s) zodat de hefboom een harmonische trilling uitvoert met een amplitude van 1^o.

3.3. Neem nu aan dat het debiet Φ voldoende groot is, zodat gedurende de vrije beweging van de hefboom, als de hoek met de horizontaal afneemt van α_2 naar α_1, de opvangbak voortdurend overstroomt. Echter als Φ te groot is, werkt de stamper niet. Bepaal de minimale waarde van het debiet Φ_2 waarbij de rijststamper niet werkt, terwijl de hefboom harmonisch beweegt.

Student code

ANTWOORDBLAD

1. **3 pts**

1.1.	De afstand van het zwaartepunt van de hefboom tot de draaias is TG =	1
1.2.	$\alpha_1 =$ $\alpha_2 =$	0.5
1.3.	Het krachtmoment μ dat werkt op hefboom verdwijnt als	1.5

Theorievraagstuk No. 1

Student code

2. **3.5 pts**

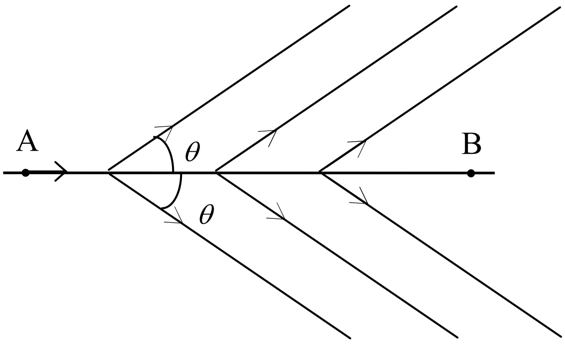
2.1.	De grafiek van μ uitgezet tegen α. Geef de waarden α en μ bij α_1, α_2 and $\alpha = 0$.	2
2.2.	Hoe wordt W_{total} weergegeven in de grafiek $\mu(\alpha)$? Hoe wordt $W_{stamper}$ weergegeven in de grafiek $\mu(\alpha)$?	0.35 0.35
2.3.	$\alpha_0 \approx$ $W_{stamper} \approx$	0.4 0.4

3. **3.5 pts**

3.1.	3.1.1. De grafiek van μ uitgezet tegen α voor waarden van α in de buurt van β Voor $\alpha = \beta$, is het evenwicht: **stabiel** ☐ **onstabiel** ☐ **indifferent** ☐ (Kruis het juiste hokje aan) 3.1.2. De functie van $\mu(\Delta\alpha)$ als functie van $\Delta\alpha$ 3.1.3. De bewegingsvergelijking van de hefboom De periode van trilling is $\tau =$	0.5 0.2 0.4 0.4
3.2.	De minimumwaarde van Φ zodat de hefboom harmonisch trilt met een amplitude van 1^o: $\Phi_1 =$	1.5
3.3.	De minimumwaarde van Φ zodat de rijststamper niet meer werkt: $\Phi_2 =$	0.5

CHERENKOV LICHT EN RINGBEELDTELLER

Licht plant zich in vacuum voort met de snelheid c. Er is geen deeltje te vinden dat zich met een grotere snelheid dan de lichtsnelheid voortbeweegt. Het is toch mogelijk dat een deeltje zich in een transparant medium beweegt met een snelheid v groter dan de lichtsnelheid $\frac{c}{n}$ in hetzelfde medium, met n de brekingsindex van het medium. Experiment (van Cherenkov, 1934) en theorie (van Tamm en Frank, 1937) hebben aangetoond dat een geladen deeltje dat met een snelheid v in een transparant medium met brekingsindex n beweegt, zo dat $v \rangle \frac{c}{n}$, licht uitstraalt, Cherenkov licht genoemd. Dit licht wordt uitgestraald in richtingen die een hoek



$$\theta = \mathbf{arccos}\frac{1}{\beta n} \quad (1)$$

met de bewegingsrichting vormen met $\beta = \frac{v}{c}$.

1. Beschouw een deeltje dat in een rechte lijn met een constante snelheid $v = \beta c$ beweegt.

   Het passeert punt A op het tijdstip $t = 0$ en punt B op het tijdstip t = t_1. Omdat het probleem bij rotatie om AB symmetrisch is, is het voldoende lichtstralen te beschouwen die in een vlak door AB liggen. In elk punt C tussen A en B straalt het deeltje een bolvormige lichtgolf uit, die zich met een snelheid $\frac{c}{n}$ voortplant. We definiëren het golffront op een bepaal tijdstip t als de omhullende van alle bolvormige golffronten op dit tijdstip.

   1.1. Bepaal het golffront op tijdstip t_1 en teken de doorsnede met het vlak waarin de baan van het deeltje ligt.

   1.2. Druk de hoek φ tussen de doorsnede en de baan van het deeltje uit in n en β.

2. Beschouw een bundel bewegende deeltjes langs een rechte lijn IS met snelheid $v \rangle \frac{c}{n}$ zo, dat de hoek θ klein is. De bundel snijdt in punt S een bolvormig concave spiegel met brandpuntsafstand f en optisch middelpunt C. Lijnstuk SC vormt met SI een kleine hoek α (bekijk de figuur op het antwoord formulier). De bundel vormt een ringvormig beeld in het brandvlak van de spiegel.
   Verklaar waarom dit gebeurt met behulp van een schets die dit laat zien. Geef de positie van het centrum O en de straal r van het ringvormige beeld.

Deze opstelling wordt gebruikt in Cherenkov ringbeeldtellers (*Ring Imaging Cherenkov Counters,* RICH). Het medium waardoor het deeltje zich beweegt noemt men de *radiator*.
Let op: in alle vragen van dit onderdeel moet je alle tweede orde en hogere termen in α en θ verwaarlozen.

3. Een bundel deeltjes met een bekende impuls $p = 10.0\ \text{GeV}/c$ bestaat uit drie types deeltjes: namelijk protonen, kaonen en pionen, met respectieve rustmassa' s

$M_{\text{p}} = 0.94\ \text{GeV}/c^2$, $M_{\kappa} = 0.50\ \text{GeV}/c^2$ en $M_{\pi} = 0.14\ \text{GeV}/c^2$.

pc en Mc^2 hebben dezelfde dimensie als energie, 1 eV is de energie die en elektron krijgt als het een potentiaalverschil van 1 volt doorloopt en 1 GeV = 10^9 eV, 1 MeV = 10^6 eV.

De bundel beweegt in lucht (de radiator) met druk P. De brekingsindex n van lucht is afhankelijk van de druk P (in atmosfeer) van de lucht, volgens de formule:

$n = 1 + aP$ met $a = 2.7\times10^{-4}\ \text{atm}^{-1}$

3.1 Bereken voor elk van de 3 deeltjes de minimale waarde P_{min} van de luchtdruk waarbij het Cherenkov licht uitzendt.

3.2 Bereken de druk $P_{\frac{1}{2}}$ waarbij het ringvormige beeld van de kaonen een straal heeft gelijk aan de helft van de straal van de overeenstemmende ring gevormd door de pionen.

Bereken van θ_{κ} en θ_{π} de waarde voor deze toestand.

Is het mogelijk een ringvormig beeld van de protonen bij deze druk te krijgen?

4. Veronderstel nu dat de bundel niet perfect monochromatisch is: de impuls p (bewegingshoeveelheid) van de deeltjes is verdeeld rond 10 GeV/c over een interval met een halve breedte Δp bij een halve hoogte. Hierdoor verbreedt de ring, en heeft de ring overeenkomstig de θ verdeling een halve breedte $\Delta\theta$ bij halve hoogte.
De druk in de radiator is gelijk aan $P_{\frac{1}{2}}$ zoals berekend in 3.2.

4.1 Bereken $\dfrac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p}$ en $\dfrac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p}$, de waarden van $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta p}$, voor het pion en het kaon.

4.2 Als de afstand $\theta_{\pi} - \theta_{\kappa}$ tussen de tussen de ringen groter is dan 10 keer de som van

de halve breedten $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\pi$, dus als $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10\ \Delta\theta$, is het mogelijk de 2 ringen duidelijk te onderscheiden.
Bereken de maximale waarde van Δp waarbij de ringen nog duidelijk te onderscheiden zijn.

5. Cherenkov ontdekte dit effect toen hij een fles water observeerde die zich dicht bij een radioactieve bron bevond. Hij nam waar dat de fles water licht uitstraalde.

5.1 Vind de minimale kinetische energie $T_{\min}$ van een deeltje met een rustmassa M dat in water beweegt zodat het Cherenkov licht uitstraalt. De brekingsindex van water n = 1.33.

5.2 De radioactieve bron die Cherenkov gebruikte straalde of α-deeltjes (dat zijn helium kernen) met een rustmassa $M_\alpha = 3.8\ \text{GeV}/c^2$ of β-deeltjes (dat zijn elektronen) met een rustmassa $M_e = 0.51\ \text{MeV}/c^2$ uit.

Bereken de waarde $T_{\min}$ voor α- en voor β-deeltjes.

De kinetische energie van deeltjes uitgezonden door een radioactieve bron is nooit groter dan enkele MeV. Welke deeltjes zenden de straling uit die is waargenomen door Cherenkov?

6. In het vorige gedeelte van het vraagstuk is de afhankelijkheid van het Cherenkov-effect van de golflengte λ verwaarloosd. We houden nu rekening met het gegeven dat de straling van het deeltje een breed spectrum heeft dat het zichtbare licht omvat (dit interval loopt van 0,4 μm tot 0,8 μm). De brekingsindex van de radiator neemt lineair met 2% van $n-1$ af als de golflengte λ toeneemt over dit interval. Dit noemen we dispersie.

6.1. Beschouw een bundel pionen die door lucht met een druk van 6 atm bewegen met een exacte impuls p van $10.0\ \text{GeV}/c$. Bereken het verschil $\delta\theta$ van de hoeken die corresponderen met beide uiteinden van het interval van het zichtbare licht.

6.2. Bestudeer, hier vanuit gaande, kwalitatief het effect van de dispersie op het ringvormige beeld van pionen met een impuls die verdeeld is rondom $p = 10 GeV/c$ met een halve piekbreedte $\Delta p = 0{,}3 GeV/c$ op de helft van de piekhoogte.

6.2.1. Bereken de verbreding van de ring als gevolg van de dispersie en bereken de verbreding als gevolg van de niet constante impuls p.

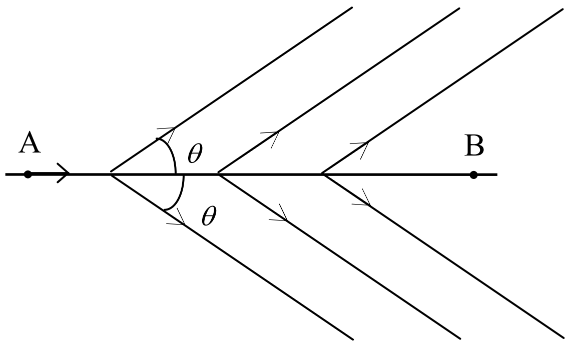
6.2.2. Geef aan hoe de kleur van de ring verandert als je van de binnenkant van de ring naar de buitenkant gaat, door de juiste hokjes aan te kruisen op het antwoordblad.

Theorievraagstuk No. 2

Student code

ANTWOORDBLAD

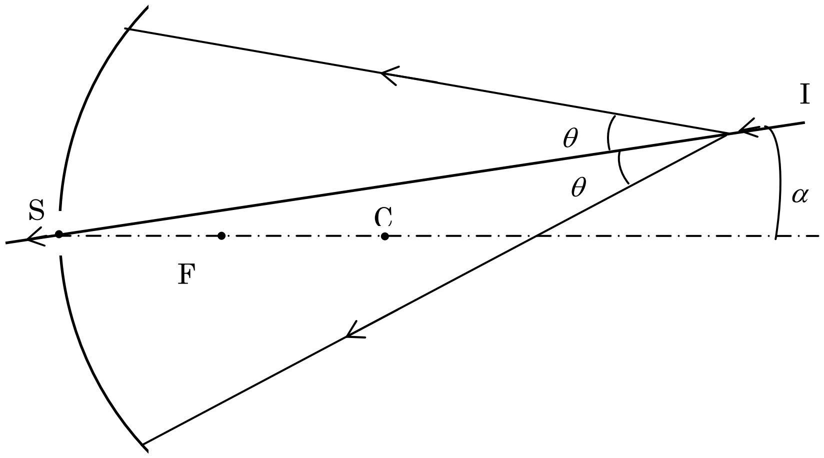
1. **1 pts**

1.1.	Teken de snijlijn van het golffront van de straling met het vlak van het papier op het tijdstip $t = t_1 > 0$ 	0.5
1.2.	$\varphi =$	0.5

Student code

2. **1.5 pt**

De vorming van het ringvormig beeld van een bundel geladen deeltjes die in een rechte lijn IS beweegt met een snelheid groter dan $\frac{c}{n}$. S is het snijpunt van de bundel deeltjes met de spiegel, F is het brandpunt en C het middelpunt van de bolvormige spiegel.



O is het centrum van het ringvormige beeld; geef de lengte van het lijnstuk FO = ...

De straal van het ringvormige beeld r = ...

Theorievraagstuk No. 2

Student code

3. **2.5 pt**

3.1.	Voor het proton, $P_{\min}$ = ...	1.25
	Voor het kaon, $P_{\min}$ = ...	
	Voor het pion, $P_{\min}$ = ...	
3.2.	$P_{\frac{1}{2}}$ = ... θ_{κ} = ... θ_{π} = ...	0.5 0.25 0.25
	Is het ringvormige beeld van het proton zichtbaar? ? Yes ☐ ☐ No	0.25

4. **2 pt**

4.1.	$\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} =$ $\frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} =$	1
4.2.	De maximale waarde Δp	1

5. **1.75 pt**

	De minimale energie van het deeltje, zodat het Cherenkov-effect in water optreedt: $T =$	1.0
	De minimale kinetische energie van het α deeltje: $T =$	0.25
	De minimale kinetische energie van het β deeltje: $T =$	0.25
	Het deeltje waarbij het Cherenkov-effect in water optreedt is	0.25

Theorievraagstuk No. 2

Student code

6. **1.25 pt**

<table>
<tr><td>6.1.</td><td>$\delta\theta =$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6.2.</td><td>6.2.1. De halve breedte van de ring ten gevolge van de dispersie is</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>De halve breedte van de ring ten gevolge van de niet constante impuls is</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>6.2.2. De kleur van
<table>
<tr><td></td><td>Blue</td><td>White</td><td>Red</td></tr>
<tr><td>• de binnenkant van de ring is</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• het midden van de ring is</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• de buitenkant van de ring is</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Kruis de juiste vakjes aan.</td><td>0.25</td></tr>
</table>

Student code

VERANDERING VAN DE LUCHTTEMPERATUUR MET DE HOOGTE, ATMOSFERISCHE STABILITEIT EN LUCHTVERVUILING

De verticale beweging van lucht is bepalend voor vele atmosferische processen, zoals de vorming van wolken en neerslag en het verspreiden van luchtvervuilende stoffen. Indien de atmosfeer stabiel is, is de verticale beweging beperkt en de lucht vervuilende stoffen hebben dan de neiging zich op te hopen rondom de plaats van emissie (uitstoot) in plaats van zich te verspreiden en te verdunnen. Daarentegen stimuleert, in een onstabiele atmosfeer, de verticale beweging van de lucht verticale verspreiding van de luchtvervuilende stoffen. Dus, de concentratie van de luchtvervuilende stoffen hangt niet alleen van de grote van de sterkte van de uitstoot af, maar ook van de stabiliteit van de atmosfeer.
We zullen de stabiliteit van de atmosfeer bepalen door gebruik te maken van het concept van de luchtbel zoals in de meteorologie, en de temperatuur van de adiabatisch stijgende of dalende luchtbel in de atmosfeer vergelijken met de temperatuur van de omringende lucht. We zullen zien dat in vele gevallen een luchtbel die van de grond opstijgt en die luchtvervuilende stoffen bevat op een bepaalde hoogte tot stilstand komt. Deze hoogte noemen we de menghoogte. Hoe groter de menghoogte is hoe kleiner de concentratie van de luchtvervuilende stof. We zullen de menghoogte en de concentratie van koolmonoxide die door motorfietsen in de binnenstad van Hanoi wordt uitgestoten, op een specifieke dag tijdens het spitsuur bepalen. Op die dag blijkt de verticale menghoogte beperkt tengevolge van een temperatuurinversie (temperatuurinversie betekent dat de temperatuur toeneemt met toenemende hoogte) die vanaf een hoogte van 119 m optreedt.
Laten we de lucht als een ideaal twee-atomig gas beschouwen, met molaire massa
$\mu = 29$ g/mol.

Voor een hoeveelheid gas dat een adiabatische verandering ondergaat geldt de volgende relatie tussen de druk p en het volume V: $pV^{\gamma} = \text{const}$, waarin $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}$ de verhouding van de specifieke warmte bij constante druk en volume is.

Je kunt de volgende gegevens gebruiken:

De algemene gasconstante $R = 8.31$ J/mol.K.

De standaardatmosferische druk op zeeniveau $p_0 =$ 101.3 kPa

De versnelling van de zwaartekracht is constant $g = 9.81$ m/s^2

Student code

De molaire warmtecapaciteit bij constante druk is: $c_p = \frac{7}{2}R$ voor lucht en is $c_p = 4R$ voor waterdamp.

De molaire warmtecapaciteit bij constant volume is: $c_V = \frac{5}{2}R$ voor lucht en is $c_V = 3R$ voor waterdamp.

Wiskundige hints

a. $\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B}\int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B}\ln(A+Bx)$

b. De oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (met A en B constant) is

$x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$ waarin $x_1(t)$ de oplossing is van de differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$.

c. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

1. Verandering van de druk met de hoogte.

1.1. Neem aan dat de temperatuur van de atmosfeer uniform is en gelijk is aan T_0.
Geef de uitdrukking van de atmosferische druk p als functie van de hoogte z.

1.2. Neem aan dat de temperatuur van de atmosfeer verandert met de hoogte volgens de vergelijking $T(z) = T(0) - \Lambda z$, hierbij is Λ een constante en wordt het temperatuurverval van de atmosfeer genoemd (de verticale gradiënt van de temperatuur is $-\Lambda$).

1.2.1. Geef voor dit geval de uitdrukking van de atmosferische druk p als functie van de hoogte z.

1.2.2. Een proces wordt vrije convectie genoemd indien de dichtheid van de lucht toeneemt met de hoogte. Geef aan bij welke waarden van Λ vrije convectie optreedt.

2. Verandering van de temperatuur van een luchtbel tijdens een verticale beweging

Neem een luchtbel die in de atmosfeer omhoog en omlaag kan bewegen. Een luchtbel is een lichaam van lucht met voldoende grote afmetingen, enkele meters in doorsnee, die als een onafhankelijk thermodynamisch systeem gezien kan worden, echter toch nog klein genoeg om haar temperatuur als uniform te beschouwen. De verticale beweging van een luchtbel kan als een adiabatisch proces (dat wil zeggen dat de warmte uitwisseling met de omgeving verwaarloosbaar is) behandeld worden. Indien de luchtbel in de atmosfeer stijgt, neemt het volume toe en koelt het af. Omgekeerd geldt dat, indien het in de atmosfeer daalt, de toenemende omgevingsdruk de lucht

binnen de luchtbel samenperst en de temperatuur binnen de luchtbel toeneemt.
Daar de afmetingen van de luchtbel niet groot zijn, kan aangenomen worden dat de atmosferische druk op verscheidene plaatsen op de begrenzing van de bel dezelfde waarde heeft, die gelijk is aan *p(z)* in het middelpunt van de bel, met *z* de hoogte van het middelpunt. De temperatuur in de bel is uniform en is gelijk aan $T_{bel}(z)$, die in het algemeen verschilt van de temperatuur van de omgevingslucht T(z).
In onderdeel 2.1 en 2.2 doen we geen aannamen over de formule van T(z).

2.1. De verandering van de temperatuur van de bel T_{bel} met de hoogte wordt gegeven door de uitdrukking $\frac{dT_{bel}}{dz} = -G$. Leidt de uitdrukking voor $G(T,T_{bel})$

2.2. Neem een speciale conditie van de atmosfeer aan waarbij op elke hoogte z de temperatuur T van de atmosfeer gelijk is aan dat van de bel T_{bel}, $T(z) = T_{bel}(z)$. We maken gebruik van het symbool Γ om de waarde van G aan te geven wanneer $T = T_{bel}$, dat betekent dat $\Gamma = -\frac{dT_{bel}}{dz}$ met $T = T_{bel}$. Γ noemt men dan het droge adiabatische temperatuurverval.

2.2.1. Leid de uitdrukking voor Γ af.

2.2.2. Bereken de numerieke waarde van Γ.

2.2.3. Leid de uitdrukking af van de temperatuur van de atmosfeer T(z) als functie van de hoogte *z*.

2.3. Neem aan dat de temperatuur van de atmosfeer afhangt van de hoogte volgens de relatie

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$ hierbij is Λ constant.

Bepaal de formule voor de temperatuur van de luchtbel $T_{bel}(z)$ als functie van de hoogte z.

2.4. Geef de formule voor $T_{bel}(z)$ indien $|\Lambda z| \ll T(0)$ en $T(0) \approx T_{bel}(0)$.

3 . De stabiliteit van de atmosfeer

Veronderstel in dit gedeelte dat *T* lineair verandert met de hoogte.

3.1 Beschouw een luchtbel die oorspronkelijk in evenwicht is met zijn omgeving op een hoogte z_0. Het heeft dus de temperatuur $T(z_0)$ van de omgevende lucht. Als de luchtbel lichtjes op en neer wordt bewogen (bv. door een atmosferische turbulentie), kan één van de volgende situaties zich voordoen:

- De luchtbel gaat terug naar zijn oorspronkelijke hoogte z_0, het evenwicht is stabiel.

  We zeggen dat de atmosfeer stabiel is.

- De luchtbel blijft bewegen in de oorspronkelijke richting, het evenwicht van de bel is onstabiel. We zeggen dat de atmosfeer instabiel is.
- De luchtbel blijft op de nieuwe plaats, het evenwicht van de bel is indifferent. We zeggen dat de atmosfeer neutraal is.

Wat zijn de voorwaarden voor Λ zodat de atmosfeer stabiel, instabiel of neutraal is.

3.2 Op de grond is de temperatuur $T_{bel}(0)$ van de luchtbel hoger dan de temperatuur $T(0)$ van de omringende lucht. Door de opwaartse kracht zal de luchtbel stijgen.
Leid een uitdrukking af voor de maximale hoogte die de luchtbel kan bereiken in het geval de atmosfeer stabiel is als functie van Λ en Γ.

4. De menghoogte

4.1 In Tabel 1 wordt de temperatuur van de lucht gegeven, opgenomen door een weerballon om 7:00 h ’s morgens op een dag in november in Hanoi. De verandering van de temperatuur met de hoogte kan weergegeven worden door de formule: $T(z) = T(0) - \Lambda z$ waarbij het temperatuurverval Λ verschillende waarden aanneemt in elk van de drie lagen: $0 < z < 96$ m, 96 m $< z <$ 119 m en 119 m $< z <$ 215 m.
Beschouw een luchtbel met een temperatuur $T_{bel}(0) = 22$ °C die opstijgt van de grond.
Bereken de temperatuur van die bel op 96 m en 119 m hoogte, maak gebruik van de gegevens in tabel 1. Gebruik de bovenstaande lineaire benadering.

4.2 Bepaal de menghoogte H die de luchtbel kan bereiken en bepaal de temperatuur $T_{bel}(H)$ op deze hoogte.
H wordt de menghoogte genoemd. Verontreinigende stoffen komende van de grond kunnen mengen met de lucht in de atmosfeer (bv. door de wind, turbulentie en dispersie) en verdunnen in deze laag.

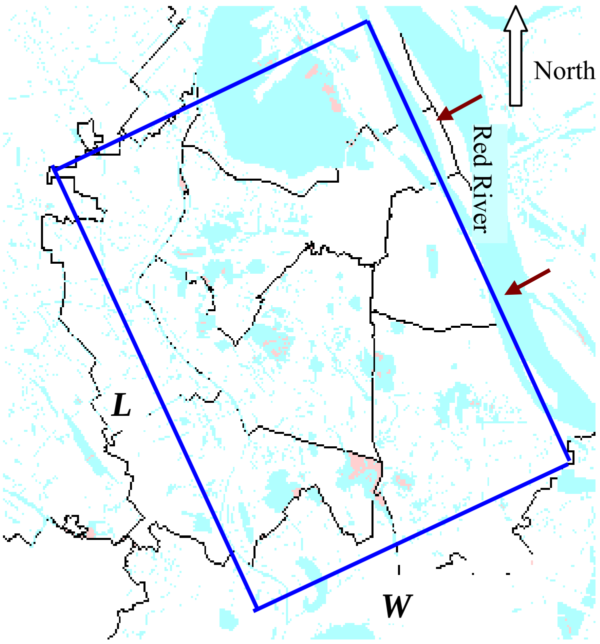
Tabel 1
Gegevens opgenomen door een weerballon om 7:00 uur ‘s ochtends op een november dag in Hanoi.

Hoogte (m)	Temperatuur (°C)
5	21,5
60	20,6
64	20,5
69	20,5
75	20,4
81	20,3
90	20,2
96	20,1
102	20,1
109	20,1
113	20,1
119	20,1
128	20,2
136	20,3
145	20,4
153	20,5
159	20,6
168	20,8
178	21,0
189	21,5
202	21,8
215	22,0
225	22,1
234	22,2
246	22,3
257	22,3

Student code

5. Schatting van de koolmonoxide (CO) verontreiniging tijdens de spits in Hanoi veroorzaakt door motorfietsen.

Het stadscentrum van Hanoi kan opgevat worden als een rechthoek met lengte L en breedte W, zoals in de figuur is aangegeven. Eén van de zijden van het rechthoek is parallel aan de Rode Rivier.



Er wordt geschat dat er tijdens de ochtendspits van 7:00 tot 8:00 uur, $8{\cdot}10^5$ motorfietsen op de weg zijn, die gemiddeld 5 km afleggen en die 12 gr CO per kilometer uitstoten. We veronderstellen dat gedurende de spits de uitstoot per seconde M constant is.
Tegelijkertijd waait er een schone noord-oostenwind loodrecht op de Rode Rivier, (dus deze wind staat loodrecht op de zijde L van de rechthoek) met een snelheid u over de stad, waarbij een deel van de CO-verontreiniging meegenomen wordt, de atmosfeer van de stad uit.
We gebruiken als model de volgende grove benadering:

- De CO verspreidt snel over het gehele volume van de menglaag boven Hanoi zodat verondersteld mag worden dat de CO-concentratie $C(t)$ op tijdstip t constant is in de hele rechthoekige doos met afmetingen L, W en H.
- De binnenkomende wind is schoon. Veronderstel dat er via de zijden die parallel staan aan de wind geen verontreiniging de doos kan ontsnappen.
- Neem aan dat om 7:00 uur ‘s ochtends de CO-verontreiniging verwaarloosbaar klein is.

5.1. Leid de differentiaalvergelijking af waaruit de concentratie van de CO-verontreiniging $C(t)$ als een functie van de tijd berekend kan worden.

5.2. Leid hieruit een uitdrukking af voor de concentratie $C(t)$ als functie van de tijd.

5.3. Bereken de waarde van de concentratie van de CO-verontreiniging $C(t)$ om 8:00 uur 's ochtends.
Gebruik daarbij de volgende waarden: L = 15 km, W = 8 km, u = 1 m/s.

Student code

ANTWOORDBLAD

1. **1.5 pt**

1.1.	Als de atmosferische temperatuur T_0 is, dan $p(z) =$	0.5
1.2.	Als de atmosferische temperatuur $T(z) = T(0) - \Lambda z$ is, dan is: 1.2.1. $p(z) =$ 1.2.2. De vrije convectie treedt op als: Λ	0.5 0.5

2. **3. 25 pt**

2.1.	$\frac{dT_{bel}}{dz} = -G =$	1.0
2.2.	$T = T_{bel}$ 2.2.1. Uitdrukking van Γ 2.2.2. Numerieke waarde van $\Gamma =$ 2.2.3. Uitdrukking van $T(z) =$	0.5 0.25 0.25
2.3.	$T_{bel}(z) =$	1.00
2.4.	$T_{bel}(z) \approx$	0.25

3. **2.25 pt**

3.1.	Aan welke voorwaarde moet het temperatuurverval Λ voldoen opdat de atmosfeer is: stabiel : .... onstabiel : .... indifferent :	 0.5 0.5 0.25
3.2.	De maximale hoogte $h =$	1

Student code

4. **1.75 pt**

4.1	Temperaturen op de hoogten van 96 m and 119 m zijn: $T_{bel}(96m) =$ $T_{bel}(119m) =$	 0.25 0.5
4.2	Maximale hoogte (menghoogte) $H =$ De temperatuur van de luchtbel is: $T(H) =$	 0.75 0.25

5. **1.25 pt**

5.1.	Differentiaalvergelijking voor $C(t)$:	0.5
5.2.	Uitdrukking voor de concentratie $C(t)$ als functie van de tijd: $C(t) =$	0.5
5.3.	Waarde van de concentratie $C(t)$ om 8:00 ‘s ochtends: $C(t) =$	0.25