

Internationale 2000 theorie

Opgave 1

- A. Een bungee springer is vastgemaakt aan het eind van een lang elastiek. De andere kant van het elastiek zit vast aan een hoge brug. De springer stapt van de brug en valt vanuit rust, omlaag naar de rivier beneden. Hij raakt het water niet. De massa van de springer is m , de lengte van het niet uitgerekte elastiek is L en de veerconstante van het elastiek is k . De versnelling van de zwaartekracht is g .

Je mag aannemen dat:

- de springer beschouwd kan worden als een puntmassa,
- de massa van het touw te verwaarlozen is,
- het touw uitrekt volgens de wet van Hooke,
- de wrijving met de lucht mag worden verwaarloosd.

Leid voor de volgende grootheden vergelijkingen af en noteer je antwoorden op je antwoordblad.

- a. de afstand y waarover de springer valt tot zijn snelheid voor de eerste keer nul is,
- b. de maximale snelheid v van de springer tijdens zijn val,
- c. de tijd t die verstreken is voordat zijn snelheid voor de eerste keer nul is.

- B. Een motor is in contact met twee warmtebronnen. De bronnen zijn identieke voorwerpen met verschillende temperatuur T_A en T_B ($T_A > T_B$). Elk voorwerp heeft een massa m en een constante soortelijke warmte c .

- a. **Leid** een uitdrukking af voor de eindtemperatuur T_0 die beide voorwerpen krijgen als de motor uit het systeem de maximale hoeveelheid mechanische arbeid gehaald heeft die theoretisch mogelijk is.

Noteer deze uitdrukking op je antwoordblad.

- b. **Leid** een uitdrukking af voor deze maximaal beschikbare hoeveelheid arbeid.

Noteer deze uitdrukking op je antwoordblad.

De motor werkt tussen twee watertanks met elk een volume van $2,50 \text{ m}^3$. De ene tank heeft een temperatuur van 350 K , de andere van 300 K .

- c. **Bereken** de maximale hoeveelheid mechanische energie die dit systeem kan leveren.

Noteer deze waarde op je antwoordblad.

$$c_{\text{water}} = 4,19 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\rho_{\text{water}} = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

- C. We nemen aan dat toen de aarde gevormd werd, de isotopen ^{238}U en ^{235}U aanwezig waren, maar niet hun vervalproducten. Het verval van ^{238}U en ^{235}U wordt gebruikt om de ouderdom T van de aarde te bepalen.

- a. ^{238}U vervalt met een halfwaardetijd van $4,50 \cdot 10^9$ jaar. De vervalproducten in de radioactieve reeks hebben halfwaardetijden die klein zijn in vergelijking met die van ^{238}U

zodat hun bestaan in eerste benadering kan worden verwaarloosd. De reeks eindigt bij de stabiele isotoop ^{206}Pb .

Leid een uitdrukking af voor ^{206}n , het aantal ^{206}Pb atomen die geproduceerd zijn in een tijd t , als functie van ^{238}N , het huidige aantal ^{238}U atomen en de halfwaardetijd van ^{238}U . Het is handig te werken met tijdseenheden van 10^9 jaar.

Noteer je antwoord op je antwoordblad.

- b. Op een vergelijkbare manier vervalt ^{235}U met een halfwaardetijd van $0,710 \cdot 10^9$ jaar via een reeks producten met kortere halfwaardetijden tot het stabiele isotoop ^{207}Pb .
Leid de vergelijking af die het verband geeft tussen ^{207}n en ^{235}N en de halfwaardetijd van ^{235}U .

Noteer je antwoord op het antwoordblad.

- c. Een uraniumerts dat ook een looderts bevat, wordt geanalyseerd met een massaspectrometer. De relatieve concentraties van de drie loodisotopen ^{204}Pb , ^{206}Pb en ^{207}Pb verhouden zich als 1,00 : 29,6 : 22,6. De isotoop ^{204}Pb wordt als referentie gebruikt omdat het niet via radioactief verval gevormd is. De analyse van zuiver looderts geeft de verhouding 1,00 : 17,9 : 15,5.

Leid een uitdrukking af voor de ouderdom van de Aarde T als gegeven is dat de verhouding $^{238}\text{N} : ^{235}\text{N}$ gelijk is aan 137 : 1.

Noteer deze uitdrukking op je antwoordblad.

- d. **Bereken** een benaderde waarde voor T uitgaande van de veronderstelling dat T veel groter is dan de halfwaardetijd van ^{238}U en ^{235}U .

Noteer deze waarde op je antwoordblad.

- e. Het is evident dat deze benaderde waarde nauwelijks groter is dan de langste halfwaardetijd. Deze benaderde waarde kan gebruikt worden om een meer correcte waarde voor T te vinden.

Bepaal de waarde van T tot op 2 % nauwkeurig.

Noteer je antwoord op je antwoordblad.

- D. Een lading Q is uniform verdeeld over een bol met straal R . Het geheel bevindt zich in vacuüm.

- a. **Leid** uitdrukkingen af voor het elektrisch veld op een afstand r van het middelpunt van de bol als $r \leq R$ en als $r > R$.

- b. **Leid** een uitdrukking af voor de totale hoeveelheid elektrische energie van deze ladingsverdeling.

Noteer je antwoord op a. en b. op je antwoordblad.

- E. Een ring van dun koperdraad kan roteren rond een verticale as in het magnetisch veld van de aarde op een plaats waar dat veld $44,5 \mu\text{T}$ is. Dat magnetisch veld is naar beneden gericht en maakt een hoek van 64° met de horizontaal.

Bereken hoe lang het zal duren voordat de hoeksnelheid van deze ring gehalveerd is. Deze tijd is veel langer dan de tijd nodig voor een omwenteling.

De dichtheid van koper is $8,90 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ en de soortelijke weerstand is $1,70 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$

Geef de verschillende stappen aan en

noteer je antwoord op je antwoordblad.

Verwaarloos alle wrijving. Ook zelfinductie effecten mag je hier verwaarlozen.

Opgave 2.

- (a) Een kathodestraalbuis, die bestaat uit een elektronenkanon en een scherm, bevindt zich in een homogeen, constant magnetisch veld \mathbf{B} . De as van de elektronenbundel en het magnetisch veld hebben dezelfde richting (zie figuur 2.1). De bundel die de anode van het elektronenkanon verlaat, is enigszins divergent. De hoek tussen de as en de baan van de elektronen varieert tussen 0 en 5° (zie figuur 2.2).

Figuur 2.1

Figuur 2.2

Meestal is er een vlek te zien op het scherm, maar voor bepaalde waarden van \mathbf{B} ontstaat een scherpe punt.

Beschouw de beweging van een elektron dat bij het verlaten van het elektronenkanon een hoek β ($0 < \beta < 5^\circ$) maakt met de as. Beschouw de componenten van de snelheid van het electron parallel aan de as en loodrecht daarop en leidt daaruit een uitdrukking af voor de verhouding e/m uitgedrukt in de volgende grootheden:

- de kleinste magnetische veldsterkte waarbij een scherpe punt op het scherm ontstaat
- de versnellingspanning in het elektronenkanon V ($NB V < 2kV$)
- en de afstand D tussen de anode en het scherm.

Noteer je uitdrukking in vak 2a van het antwoordvel.

- (b) We beschouwen nu een tweede methode om de verhouding e/m van het elektron te bepalen. De opstelling is zowel van de zijkant als de bovenkant te zien in figuur 2.3.; hierin is de richting van het magnetisch veld aangegeven met \mathbf{B} . In dit homogene magneetveld zijn twee cirkelvormige, koperen platen met een straal ρ opgesteld. De onderlinge afstand t is zeer klein. Over de platen staat een potentiaalverschil V . De assen van de parallelle platen vallen samen en staan loodrecht op het magnetisch veld. Het geheel bevindt zich in een cilindervormige doos met straal $\rho + s$. De mantel van de doos is aan de binnenkant bedekt met een fotografische film. Met andere woorden: de film bevindt zich op een afstand s van de rand van de platen. De hele opstelling bevindt zich in vacuüm. Merk op dat t zeer veel kleiner is dan s en ρ .

Tussen de middens van de platen bevindt zich een puntbron die β -deeltjes uitzendt in alle richtingen en met verschillende snelheden. *Een en dezelfde strook film* wordt achtereenvolgens onder drie verschillende omstandigheden blootgesteld aan de straling:

- Ten eerste met $B = 0$ en $V = 0$
- Ten tweede met $B = B_0$ en $V = V_0$
- Ten derde met $B = -B_0$ en $V = -V_0$

waarin B_0 en V_0 positieve constanten zijn. Als de bovenste plaat positief geladen is, dan is $V > 0$. De positieve richting van het magnetisch veld wordt gegeven in figuur 2.3. Neem bij dit onderdeel aan dat de afstand t verwaarloosbaar klein is.

Figuur 2.3

Figuur 2.4

De film is in twee helften verdeeld: A en B (zie figuur 2.3). In figuur 2.4 is een van die twee helften te zien.

Welke helft is dat?

Noteer een A of een B op het antwoordvel.

Licht je antwoord toe door de richting van de krachten die op het elektron werken, te tekenen.

- (c) De afstand (y) van de buitenste sporen op de film wordt bij verschillende hoeken Φ gemeten met behulp van een microscoop (zie figuur 2.4). De resultaten staan in onderstaande tabel. De hoek Φ is gedefinieerd zoals in figuur 2.3 is aangeven.

Hoek Φ	90	60	50	40	30	23
Afstand y (mm)	17,4	12,7	9,7	6,4	3,3	Einde van het spoor

De waarden van de verschillende grootheden zijn:

$$B_0 = 6,91 \text{ mT}$$

$$V_0 = 580 \text{ V}$$

$$t = 0,80 \text{ mm}$$

$$s = 41,0 \text{ mm}$$

de snelheid van het licht is $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$

de massa van het elektron $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Bepaal de maximale kinetische energie van de waargenomen β -deeltjes.

Noteer de waarde van deze maximale kinetische energie in eV in vak 2c van het antwoordvel.

- (d) **Bepaal** de waarde van de verhouding e/m van het elektron met behulp van de informatie uit onderdeel (c). Teken daarvoor een terzake doende grafiek op het bijgeleverde grafiekenpapier.

Geef de grootheden die langs beide assen staan in *algebraïsche* vorm weer en vermeld deze uitdrukkingen tevens in vak 2d van het antwoordvel.

Bepaal met de grafiek de verhouding e/m en noteer deze waarde in vak 2d.

Merk op dat de gevonden waarde kan afwijken van de literatuurwaarde als gevolg van systematische fouten.

Opgave 3 Gravitatiegolven en effecten van gravitatie op licht

- A. In dit deel van de vraag worden de moeilijkheden onderzocht bij het detecteren van gravitatiegolven opgewekt door astronomische gebeurtenissen. Een explosie van een veraf gelegen supernova kan de aanleiding zijn tot fluctuaties in de sterkte van het zwaartekrachtveld op het aardoppervlak in de orde van grootte van 10^{-19} N/kg. Een model voor een detector van gravitatiegolven is gegeven in figuur 3.1. De detector bestaat uit twee metalen staven (lengte 1 m) die loodrecht op elkaar staan. Een uiteinde van elke staaf is optisch vlak gepolijst, het andere uiteinde is vastgemaakt. De positie van een van de staven wordt zodanig ingesteld dat een minimaal signaal geregistreerd wordt door de fotocel.

Figuur 3.1

Met behulp van een piezo-elektrisch element wordt een korte, scherpe, longitudinale puls opgewekt in de staven. Als gevolg hiervan trillen de vrije uiteinden van de staven waarbij de longitudinale uitwijking Δx_t gegeven wordt door:

$$\Delta x_t = a \cdot e^{-m} \cdot \cos(\mathbf{w} \cdot t + \mathbf{f})$$

a , m , w en f zijn constanten.

- a. **Bepaal** de waarde van μ , als je weet dat de amplitude van de beweging in 50 s afneemt met 20 %.

- b. Gegeven is dat voor de longitudinale golfsnelheid $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ waarin E de modulus van

Young voorstelt en ρ de dichtheid.

Bepaal de waarde voor ω als de staven gemaakt zijn van aluminium ($E = 7,1 \cdot 10^{10}$ Pa; $\rho = 2700$ kg m⁻³).

- c. Het is onmogelijk de staven exact even lang te maken, hierdoor geeft de fotocel een signaal met een zwevingsfrequentie van 0,005 Hz.
Bereken het lengteverschil tussen de staven?
- d. **Leid** een algebraïsche uitdrukking af voor de lengteverandering Δl voor een staaf met lengte l onder invloed van een verandering Δg in de sterkte van het gravitatieveld als functie van l en materiaalconstanten van de staaf. Ga er vanuit dat deze staaf gericht is op de bron van de gravitatiegolf.
- e. Het licht van de laser is monochromatisch en heeft een golflengte van 656 nm. De minimale verschuiving van het interferentiepatroon die nog gedetecteerd kan worden is gelijk aan 10^{-4} keer de golflengte van het laserlicht.
Bereken in dat geval de minimale waarde van l die een staaf zou moeten hebben opdat het systeem veranderingen in g gelijk aan 10^{-19} N/kg kan detecteren.

B. Dit deel behandelt het effect van een gravitatieveld op de voortplanting van licht in de ruimte.

- a. Een foton uitgezonden van het oppervlak van de zon (massa M , straal R) krijgt een roodverschuiving. Veronderstel een rustmassa van het foton die gelijk is aan de foton-energie.
Toon met behulp van de zwaartekrachttheorie van Newton aan dat de effectieve (of gemeten) frequentie van het foton in het oneindige gereduceerd is met een factor $(1 - GM/Rc^2)$. Dit is de roodverschuiving.
- b. De afname van de frequentie van het foton komt overeen met een verhoging van zijn periode, of, als we het foton beschouwen als standaardklok, een tijddilatatie. Bovendien kan aangetoond worden dat een tijddilatatie altijd samengaat met een lengtecontractie met dezelfde factor.

We bestuderen nu het effect hiervan op de voortplanting van het licht in de omgeving van de zon. Eerst definiëren we een brekingsindex n_r in een punt op een afstand r van het

centrum van de zon:

$$n_r = \frac{c}{c_r}$$

met c de lichtsnelheid zoals deze gemeten wordt in een stelsel ver weg van het gravitatieveld van de zon ($r \rightarrow \infty$) en c_r de lichtsnelheid in een stelsel op een afstand r van het centrum van de zon.

Toon aan dat n_r benaderd kan worden als:

$$n_r = 1 + \frac{a \cdot G \cdot M}{r \cdot c^2}$$

voor kleine waarden van GM/rc^2 .

- c. **Bereken**, gebruik makend van deze uitdrukking voor n_r , in radialen de hoek waarmee een lichtstraal van zijn rechte baan wordt afgebogen als deze langs de zon scheert.

$$\begin{aligned} G &= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \\ M &= 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\ R &= 6,95 \cdot 10^8 \text{ m} \\ c &= 3,00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

De volgende integraal heb je wellicht nodig:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$$

country

Student
No.Question
No.Page
No.Total No.
of pages

Vraag 1 ~ antwoordvel

punten

A

- 0,5 (a) afstand y waarover de springer valt voor hij de eerste keer tot rust komt

$$y =$$

- 0,5 (b) maximale snelheid $v =$
- 1,0 (c) ogenblik t als hij de eerste keer tot rust komt =

B

- 0,7 (a) eindtemperatuur T_0 waarbij er maximaal arbeid geleverd wordt =
- 0,8 (b) maximale hoeveelheid verrichte arbeid =
- 0,5 (c) maximale hoeveelheid verrichte arbeid in MJ =

C

- 0,5 (a) aantal ^{206}Pb atomen $^{206}\text{n} =$
- 0,1 (b) $^{207}\text{n} =$
- 0,5 (c) de uitdrukking voor T is
- 0,4 (d) de benaderende waarde voor T in jaar is
- 0,5 (e) een meer nauwkeurige waarde voor T is

D

- 0,5 (a) elektrisch veld voor $r \leq R =$
- 0,5 (b) elektrisch veld voor $r > R =$
- 1,0 (c) totale elektrische energie =

- 2,0 E tijd voor halvering van de hoeksnelheid in s =

country

Student
No.

Question
No.

Page
No.

Total No.
of pages

Vraag 2 ~ antwoordvel

punten

- 3.0 2a) Uitdrukking voor de verhouding e/m van het elektron:
- 1.5 2b) Welke helft is in figuur 2.3 te zien? (A of B?):
- 2.0 2c) De maximale kinetische energie van de β -deeltjes: eV
- 3.5 2d) De algebraïsche uitdrukking voor de grootheid langs de HORIZONTALE as:

De algebraïsche uitdrukking voor de grootheid langs de VERTICALE as:

Waarde voor de verhouding e/m in Coulomb per kilogram: C/kg

--

country

--

Student No.

--

Question No.

--

Page No.

--

Total No. of pages

Vraag 3 ~ antwoordvel

punten

A

0,1 a. $\mu = \dots\dots\dots \text{s}^{-1}$

0,1 b. $\omega = \dots\dots\dots \text{rad s}^{-1}$

1,5 c. $\delta l = \dots\dots\dots \text{m}$

1,5 d. $\Delta l = \dots\dots\dots \text{m}$

0,3 e. $l_{\min} = \dots\dots\dots \text{m}$

B.

1,0 a. XXX

2,0 b. $\alpha = \dots\dots\dots$

3,5 c. afbuigingshoek = $\dots\dots\dots$ radialen