XXX INTERNATIONALE

NATUURKUNDE OLYMPIADE

PADUA, ITALIË

THEORIE-TOETS

22 juli 1999

Opgave 1. **Absorptie van straling door een gas**

Een cilindervormig vat, met de as vertikaal, bevat een moleculair gas dat in thermodynamisch evenwicht is. Het gas is afgesloten met een glazen zuiger die vrij kan bewegen. We veronderstellen dat het gas niet kan weglekken en dat de wrijving tussen de zuiger en de wand van de cilinder net genoeg is om trillingen uit te dempen, maar overigens verwaarloosbaar klein is. Aanvankelijk is de temperatuur van het gas gelijk aan die van de omgeving en is de druk van de buitenlucht gelijk aan de standaarddruk. In goede benadering kan het gas als een ideaal gas beschouwd worden. We veronderstellen dat de wand en de bodem van de cilinder een zeer laag warmtegeleidend vermogen en een zeer lage warmtecapaciteit hebben, zodat de warmteoverdracht tussen het gas en de omgeving in dit vraagstuk verwaarloosd kan worden.

Licht van een laser met een constant vermogen wordt door de glazen zuiger in de cilinder gestuurd. De straling gaat ongehinderd door de lucht en door het glas, maar wordt volledig door het gas in de cilinder geabsorbeerd. Door de absorptie komen de gasmoleculen in een aangeslagen toestand. Via een aantal tussenniveau s bereiken de moleculen de grondtoestand onder het uitzenden van infrarood licht. Dit infrarood licht wordt door andere moleculen geabsorbeerd of wordt door de wanden van de cilinder (waaronder de glazen zuiger) gereflecteerd. De energie van het geabsorbeerde laserlicht wordt op deze manier in zeer korte tijd omgezet in inwendige energie (moleculaire bewegingen).

Men neemt waar dat tijdens het bestralen de glazen zuiger omhoog beweegt. Na enige tijd wordt de laser uitgeschakeld en meet men de verplaatsing van de zuiger.

Bereken met de gegevens onderaan dit vraagstuk en – waar nodig – de gegevens op de bladzijde met constanten, de temperatuur en de druk van het gas nadat het bestraald is. [2 punten]
Bereken de mechanische arbeid die door het gas verricht is als gevolg van de absorptie van de straling. [1 punt]
Bereken de hoeveelheid stralingsenergie die in de tijd dat de laser aan heeft gestaan, geabsorbeerd is. [2 punten]
Bereken het vermogen van het laserlicht dat geabsorbeerd is en bereken het aantal geabsorbeerde fotonen per seconde. [1,5 punten]
Bereken het rendement van het proces waarbij de energie van het laserlicht wordt omgezet in mechanische potentiële energie van de glazen zuiger. [1 punt]

Hierna wordt de cilinderas langzaam over 90° gedraaid, zodat de cilinder horizontaal komt te liggen. Warmte uitwisseling tussen het gas en de omgeving kan daarbij nog steeds verwaarloosd worden.

Geef aan of de druk en/of de temperatuur van het gas veranderen als gevolg van het kantelen van de cilinder en – als dat het geval is – bereken dan de nieuwe waarden van druk en temperatuur. [2,5 punten]

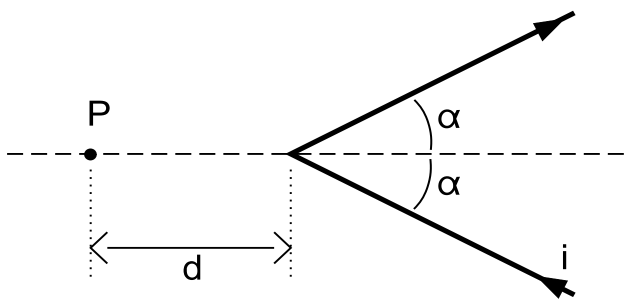
Gegevens

Kamertemperatuur	$T_0 = 20{,}0°C$
De binnendiameter van de cilinder:	$2r = 100$ mm
De massa van de glazen zuiger:	$m = 800$ g
De hoeveelheid gas in de cilinder:	$n = 0{,}100$ mol
De soortelijke warmte van het gas bij constant volume is:	$c_V = 20{,}8$ J/(mol.K)
De golflengte van het laserlicht:	$\lambda = 514$ nm
De tijd dat de laser aan staat:	$\Delta t = 10{,}0$ s
De verplaatsing van de glazen zuiger nadat de laser is uitgeschakeld:	$\Delta s = 30{,}0$ mm

Opgave 2. Het magnetisch veld in de buurt van een V-vormige draad

Een van de eerste successen van Ampère bij het verklaren van magnetische verschijnselen betreft de berekening van het magnetisch veld dat veroorzaakt wordt door stroomvoerende draden. Hij verbeterde daarbij eerdere theorieën van Biot en Savart.

Een interessante situatie is die waarbij door een dunne, zeer lange draad een constante stroom i loopt. Deze draad is in de vorm van een "V" gebogen. De halve hoek tussen de beide benen van de "V" wordt genoemd (zie figuur). Volgens Ampère's berekeningen is de grootte van het magnetisch veld B in een punt op de symmetrieas van de "V", erbuiten op een afstand d vanaf het punt, evenredig met: $\tan(\frac{\alpha}{2})$



Het werk van Ampère werd later opgenomen in de elektromagnetische theorie van Maxwell, en wordt nu algemeen geaccepteerd. Gebruik de huidige kennis van het elektromagnetisme om de volgende problemen op te lossen.

Bepaal de richting van het magnetisch veld **B** in punt P. [1 punt]

Ga uit van het gegeven dat **B** evenredig is met: $\tan(\frac{\alpha}{2})$.

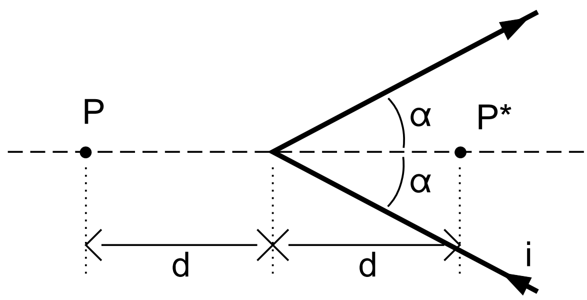
Leid een uitdrukking af voor de evenredigheidsconstante k in de uitdrukking:

$$|B(P)| = k.\tan(\frac{\alpha}{2})$$ [1,5 punten]

μ

Leid een uitdrukking af voor het veld **B** in een punt P*, dat binnen de "V" ligt op de manier zoals is aangegeven in de onderstaande figuur.
Bepaal ook de richting van deze **B**. [2 punten]

Om de sterkte van het magnetisch veld in punt P te bepalen wordt daar een in alle richtingen draaibaar magnetisch naaldje opgesteld met traagheidsmoment I en magnetisch dipoolmoment μ . Het kan trillen, waarbij de evenwichts-stand overeen komt met de richting van het magnetisch veld.



Geef een uitdrukking voor de trillingstijd van trillingen met kleine amplitude van deze naald, als functie van B [2,5 punten]

Voor dezelfde situatie hadden Biot en Savart verondersteld dat het magnetisch veld in P gelijk zou kunnen zijn aan (hier wordt de moderne notatie gebruikt)

$$B(P) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$$ (α in rad) met μ_0 is de magnetische permeabiliteit van vacuüm.

Uiteindelijk besloten ze om door middel van een experiment uit te maken welke van de twee opvattingen (die van Ampère of die van Biot-Savart) de juiste was.
Ze deden dat door de trillingstijd van het magnetische naaldje in punt P te meten als functie van de hoek tussen de benen van de "V". Voor sommige waarden van α zijn de verschillen echter te klein om ze te kunnen waarnemen.

Om experimenteel onderscheid te kunnen maken tussen de twee voorspellingen voor de trillingstijd T van het magnetische naaldje in P, moet er tenminste een verschil van 10% zijn, namelijk $T_1 > 1{,}10\ T_2$ (T_1 is de voorspelling van Ampère en T_2 is de voorspelling van Biot-Savart).

Ga na in welk bereik α gekozen moet worden om te kunnen beslissen tussen de beide interpretaties. [3 punten]

Hint

Afhankelijk van de oplossingsmethode bij een van de onderdelen van deze vraag kan de volgende goniometrische formule nuttig zijn: $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

Opgave 3. Een ruimtesonde naar Jupiter

Deze opgave behandelt een veelgebruikte methode om een ruimtesonde te versnellen in een bepaalde richting. In de buurt van een planeet kan de ruimtesonde zijn snelheid verhogen en zijn richting veranderen, door een klein gedeelte van de energie van de beweging van de planeet om de zon te gebruiken. We analyseren nu deze methode door een ruimtesonde de planeet Jupiter op korte afstand te laten passeren.

De planeet Jupiter beweegt in een ellipsvormige baan om de zon. Deze baan kunnen we als cirkelvormig beschouwen met R als gemiddelde straal. Voordat we de fysische analyse uitvoeren zoeken we eerst de volgende grootheden.

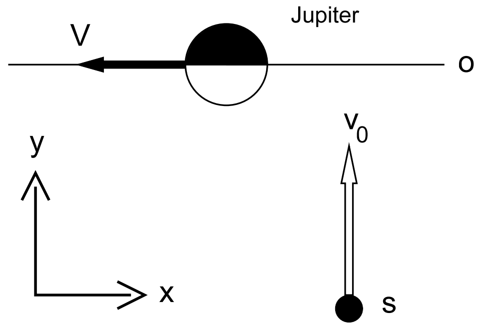
Bepaal de baansnelheid V van Jupiter in zijn baan om de zon [1,5 punten]

Er is een punt tussen de zon en Jupiter waar de aantrekkingskrachten van de zon en van Jupiter in evenwicht zijn.

Bepaal de afstand van Jupiter tot dat punt. [1 punt]

De ruimtesonde met massa m = 825 kg beweegt naar Jupiter. Voor de eenvoud nemen we aan dat de baan van de ruimtesonde zich volledig bevindt in het baanvlak van Jupiter, zodat het speciale geval waarbij de ruimtesonde uit het baanvlak van Jupiter wordt gestoten hier niet aan de orde is. We behandelen alles wat gebeurt in het gebied waar de aantrekking van Jupiter alle andere aantrekkings-krachten overheerst. Ten opzichte van het stelsel van het zwaartepunt van de zon is de beginsnelheid van de ruimtesonde gelijk aan $v_0 = 1{,}00 \cdot 10^4$ m/s (in de positieve y-richting). De snelheid van Jupiter is gericht volgens de negatieve x-richting (zie figuur 1). Met "beginsnelheid" bedoelen we de snelheid van de sonde als deze zich in de interplanetaire ruimte bevindt en vrij ver verwijderd is van Jupiter, maar reeds in een gebied is waar de aantrekking van de zon verwaarloosbaar is ten opzichte van die van Jupiter. We stellen dat de aantrekking in een zodanig korte tijd gebeurt dat we de verandering van richting van Jupiter in zijn baan om de zon kunnen verwaarlozen. We nemen ook aan dat de ruimtesonde achter Jupiter passeert en bijgevolg de x-coördinaat van deze sonde groter is dan die van Jupiter, als beide dezelfde ycoördinaat bezitten.

Bepaal de richting en de grootte van de snelheid v van de ruimtesonde in het stelsel van Jupiter als de sonde nog ver verwijderd is van Jupiter (is de hoek tussen de richting van de snelheid en de x-as). [2 punten]



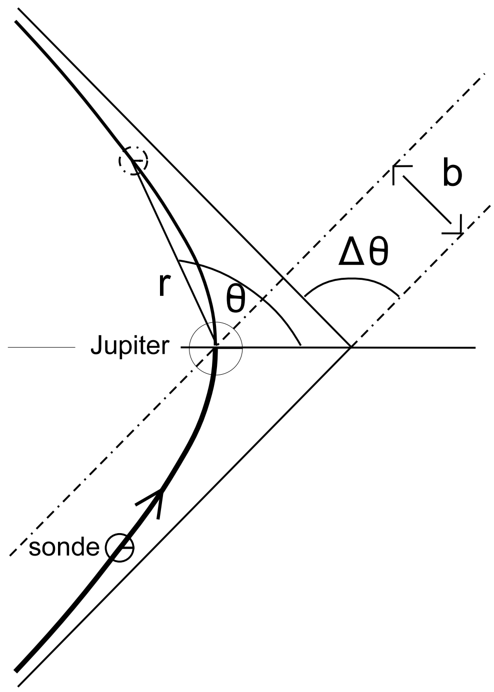
Figuur 1. Schets van het stelsel van het zwaartepunt van de zon. O geeft de baan van Jupiter aan en s is de ruimtesonde.

Bepaal de waarde van de totale mechanische energie E van de ruimtesonde in het stelsel van Jupiter. Stel hierbij – zoals gebruikelijk - dat de potentiële energie op zeer grote afstand gelijk is aan nul. Op deze grote afstand beweegt de ruimtesonde met praktisch constante snelheid doordat alle gravitatiekrachten klein zijn. [1 punt]

De baan van de ruimtesonde in het stelsel van Jupiter is een hyperbool waarvan de vergelijking in poolcoördinaten in dit stelsel wordt gegeven door:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}\cos\theta}\right) \qquad [1]$$

hierbij is b de afstand tussen een van de asymptoten en Jupiter (soms botsingsparameter genoemd), E is de totale mechanische energie van de sonde in het stelsel van Jupiter, G is de gravitatieconstante, M is de massa van Jupiter en r en θ zijn de poolcoördinaten (r is de afstand en θ is de poolhoek). De figuur 2 toont de twee takken van de hyperbool zoals beschreven door vergelijking [1]. De asymptoten en de poolcoördinaten zijn ook aangeduid. De baan van de sonde is met een dikke lijn weergegeven.



Figuur 2.

Gebruik de baanvergelijking [1] van de sonde om de totale hoekverandering in het stelsel van Jupiter te bepalen (zie figuur 2) als een functie van de beginsnelheid v en de botsingsparameter b. [2 punten]

Stel dat de minimale afstand van de sonde en het middelpunt van Jupiter niet kleiner mag zijn dan driemaal de straal van Jupiter.

Bereken de minimale botsingsparameter b en de grootst mogelijke hoekverandering $\Delta\theta$. [1 punt]

Stel een vergelijking op voor de eindsnelheid v'' van de sonde in het stelsel van de zon alleen als functie van de snelheid van Jupiter V, de beginsnelheid van de sonde v_0 en de hoekverandering $\Delta\theta$. [1 punt]

Gebruik het resultaat uit voorgaande vragen om de numerieke waarde van de eindsnelheid v'' in het stelsel van de zon bij de grootst mogelijke hoekverandering te berekenen. [0,5 punten]

Hint

Afhankelijk van de gevolgde oplossingsmethode kunnen de goniometrische functies van pas komen:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$