XXX INTERNATIONALE

NATUURKUNDE OLYMPIADE

PADUA, ITALIË

PRACTICUM-TOETS

20 juli 1999

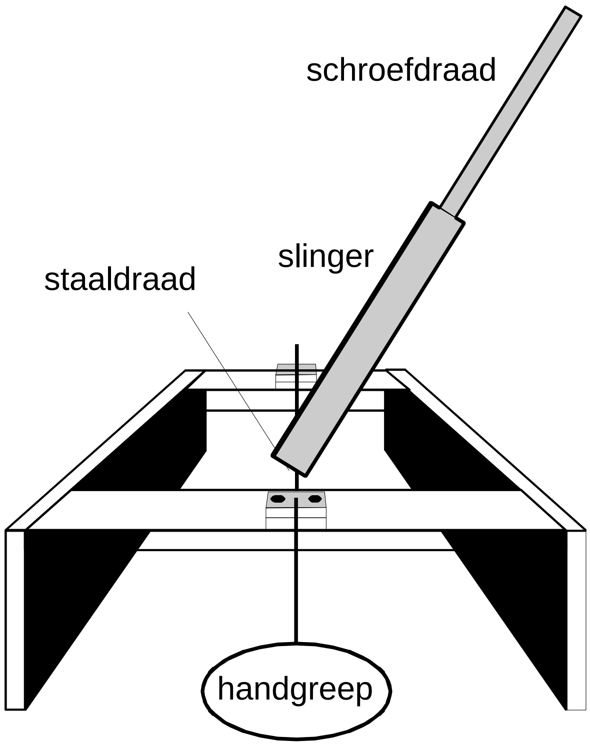
De Torsieslinger

In dit experiment bestuderen we een relatief complex mechanisch systeem – een torsieslinger – en onderzoeken we daarvan de belangrijkste parameters. Met een horizontale rotatie-as blijkt zelfs een eenvoudig geval van bifurcatie op te treden.

Beschikbare apparatuur

Een torsieslinger.
Een stuk staaldraad met een handgreep.
Een lange, zeskantige moer die op het stuk schroefdraad geschroefd kan worden.
Een liniaal.
Een stopwatch.
Zeskantige inbussleutels.
A3 millimeter papier
Een tafelklem.
Cellotape.
Een stuk T-profiel.

De apparatuur is in figuur 1 weergegeven; het is een torsieslinger waarvan de as zowel horizontaal als vertikaal opgesteld kan worden. De rotatie-as is een stukje staaldraad dat onder mechanische trekspanning wordt ingeklemd. De slinger bestaat uit een binnenstuk gemaakt van schroefdraad dat naar binnen en naar buiten geschroefd kan worden en dat wordt vastgezet met een kleine, zeskantige moer. Dit stuk schroefdraad kan **niet** van de rest van de slinger worden losgemaakt.
Bij het in elkaar zetten van de slinger in opgave 5, steekt men de draad eerst door het gat in de slinger, waarna de draad onder trekspanning wordt vastgezet. Maak eerst het uiteinde vast en gebruik dan de handgreep om een trekspanning uit te oefenen terwijl je de andere kant vastzet.



Figuur 1. Schets van de apparatuur als de rotatie-as horizontaal staat.

Waarschuwing: De draad moet onder trekspanning gezet worden om er voor te zorgen dat de slinger in evenwicht kan staan. Het is echter niet nodig om een spankracht groter ca. 30N uit te oefenen. Buig de draad niet tijdens het trekken: deze zou kunnen breken.

De variabelen die de slingering beschrijven:

De stand van de slinger, weergegeven door de hoek θ die de slinger maakt met de normaal van het vlak van het frame van de slinger (zie figuur 1 en 3).

De afstand x tussen het uiteinde van het stuk schroefdraad en de rotatie-as.

De periode T van de slingeringen.

De parameters die kenmerkend zijn voor het systeem:

De torsie-elasticiteitskonstante K (krachtmoment = K . hoekverdraaiing)

De massa's M_1 en M_2 van de twee onderdelen van de slinger (1 = de aluminium cilinder en 2 = het stuk schroefdraad).

De afstanden R_1 en R_2 tot de rotatie-as van de zwaartepunten van elk onderdeel van de slinger. In dit geval is het stuk schroefdraad voldoende homogeen om R_2 te kunnen berekenen uitgaande van de massa, de lengte l en de afstand x. R_2 is derhalve een eenvoudige functie van de andere parameters.

De traagheidsmomenten I_1 en I_2 van de twee onderdelen van de slinger. In dit geval is het stuk schroefdraad voldoende homogeen om I_2 te kunnen berekenen uitgaande van de massa, de lengte l en de afstand x. I_2 is derhalve een eenvoudige functie van de andere parameters

De hoek θ_0 (gemeten tussen de normaal van het vlak van het frame en de slinger) in de evenwichtsstand. De slinger wordt aan de staaldraad bevestigd met een inbusboutje aan de onderkant van de cilinder van de slinger. Daarom verandert de waarde van θ_0 met elke nieuwe instelling van de apparatuur.

Samenvattend wordt het systeem door 7 parameters beschreven: K, M_1, M_2, R_1, I_1, l, θ_0. Maar de waarde van θ_0 verandert met elke nieuwe instelling van de apparatuur, zodat er uiteindelijk 6 echte constanten overblijven. Het doel van het experiment is nu om de waarde van deze 6 parameters (namelijk K, M_1, M_2, R_1, I_1 l) **experimenteel** te bepalen. Merk op dat het stuk schroefdraad niet uit de cilinder gehaald kan worden en dat alleen de totale massa $M_1 + M_2$ gegeven is (staat op elke slinger gedrukt).

In dit experiment zijn verschillende grootheden lineair afhankelijk van slechts een variabele. In dat geval moet je de parameters van deze lineaire functie bepalen. Je kunt een lineaire fit gebruiken, maar alternatieve methoden zijn ook toegestaan. De nauwkeurigheid van deze parameters kunnen aan de hand van de lineaire fit bepaald worden of uit de spreiding van de meetwaarden rond de fit.

We hebben de uitdrukking nodig voor het traagheidsmoment van het stuk schroefdraad (daarbij veronderstellen we dat de dwarsafmetingen verwaarloosbaar klein zijn ten opzichte van de lengte).

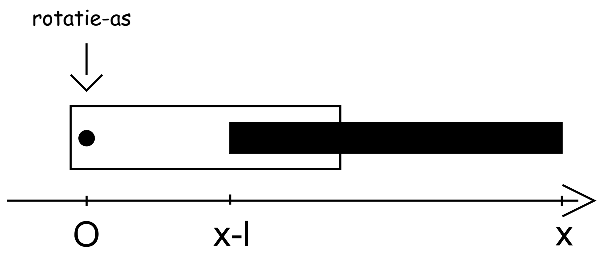
$$I_2(x) = \int_{x-l}^{x} \lambda s^2 ds = \frac{\lambda}{3}(x^3 - (x-l)^3) = \frac{\lambda}{3}(3lx^2 - 3l^2x + l^3) \qquad [1]$$

met $\lambda = M_2/l$ de massa per lengte-eenheid, en daarom is:

$$I_2(x) = M_2x^2 - M_2lx + \frac{1}{3}M_2l^2 \qquad [2]$$

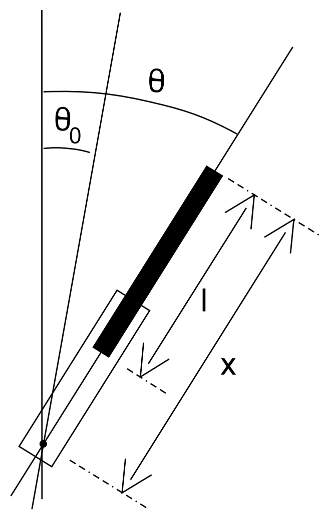
Voer nu de volgende opdrachten uit om de 6 parameters M_1, M_2, K, R_1, l, I_1 te bepalen:

Alleen de waarde van de totale massa $M_1 + M_2$ is gegeven (staat op de slinger gedrukt). De massa s M_1 en M_2 kunnen afzonderlijk bepaald worden uit de afstand R(x) van het zwaartepunt van de slinger tot de rotatie-as.



Figuur 2. Bij de uitvoering van het experiment gebruiken we vergelijking [2] voor het traagheidsmoment van de staaf waarbij de dwarsafmetingen verwaarloosbaar klein zijn ten opzichte van de lengte. Het traagheidsmoment moet berekend worden ten opzichte van de as door het punt s = 0.

1. Stel eerst een vergelijking op van de afstand van het zwaartepunt als functie van de afstand x en van de parameters M_1, M_2, R_1, en l. [0,5 punt]
2. Bepaal vervolgens R(x) voor verschillende waarden van x (tenminste 3)[1]. Deze metingen moeten uiteraard worden uitgevoerd met de slinger los van de staaldraad. Uit de meetwaarden en de voorgaande vergelijking kun je de waarde van M_1 en M_2 bepalen. [3 punten]
3. Stel een vergelijking op voor het totale traagheidsmoment I als functie van x en van de parameters M_2, I_1 en l. [0,5 punt]
4. Stel de bewegingsvergelijking op bij een horizontale rotatie-as als functie van de hoek θ (zie figuur 3) en van x, K, θ_0, M_1, M_2, het totale traagheidsmoment I en de afstand van het zwaartepunt R(x). [1 punt]



Figuur 3. De slinger met de variabelen en x en de parameters θ_0 en l

Om de waarde van K te bepalen zetten we de slinger in elkaar met de rotatie-as horizontaal. De schroefdraad moet in eerste instantie zover mogelijk in de cilinder worden gedraaid. Bevestig de cilinder aan het staaldraad met de inbusbout zodanig dat de evenwichtspositie die ontstaat ten gevolge van het evenwicht tussen het gewicht en de torsiekracht van de draad duidelijk verschilt van de verticale as (zie figuur 4).

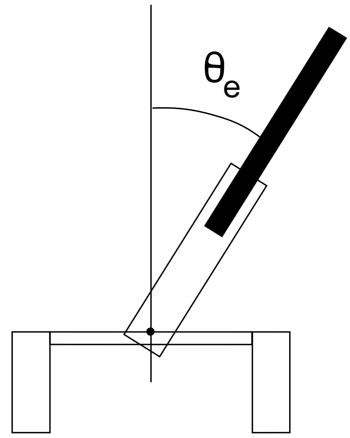
[1] De kleine zeskantige moer moet worden vastgezet telkens als de schroefdraad wordt verplaatst. De massa van deze moer maakt deel uit van de massa M_1.

5. Bepaal de hoek θ_e in evenwichtspositie voor verschillende waarden van x (minimaal 5) [4 punten]

6. Bepaal K . Maak daarbij gebruik van de metingen uit onderdeel 5. [4.5 punten]

Plaats de slinger nu zodanig dat de rotatieas vertikaal is en meet de slingertijd voor meerdere waarden van x (tenminste 5).

7. Bepaal I_1 en I met behulp van deze metingen [4 punten]

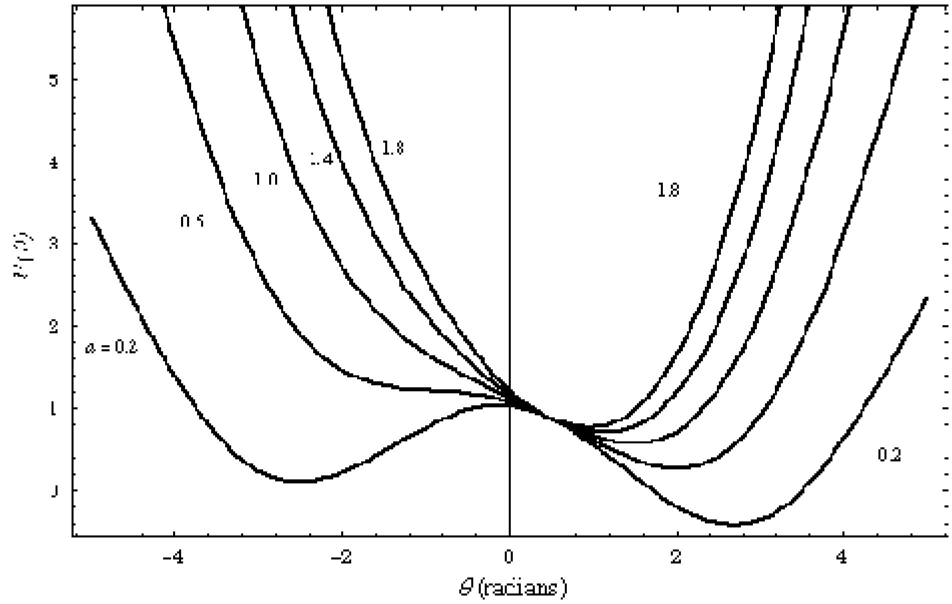


Figuur 4. In dit experiment wijkt de evenwichtsstand duidelijk af van de vertikaal.

Voor het laatste onderdeel maak je de volgende instellingen:

zet de rotatieas horizontaal
het stuk schroefdraad zo ver mogelijk naar binnen gedraaid
de slinger zo nauwkeurig mogelijk in een verticale evenwichtsstand
verzwaar de slinger met de lange zeshoekige moer, door deze met enkele slagen vast te draaien op het stuk schroefdraad.

Op deze manier **kan** de slinger 2 evenwichtsstanden hebben, afhankelijk van de waarde van x (slingerlengte). Dit is zichtbaar in figuur 5, waar de potentiële energie is uitgezet als functie van de hoek θ.



Figuur 5. Grafiek van de functie $U(\theta) = \frac{a}{2}(\theta - \theta_0)^2 + \cos\theta$ (dit is evenredig met de potentiële energie van het systeem) als functie van θ, met $\theta_0 \neq 0$.
De verschillende lijnen corresponderen met verschillende waarden voor a, zoals in de figuur is aangegeven. Kleine waarden van a corresponderen met bifurcatie. De waarde van a is gekoppeld aan de slingerlengte x.

Het ontstaan van een tweede minimum in de potentiële energie in figuur 5 is een illustratie van een verschijnsel dat in de wiskunde bekend staat als bifurcatie.
Er bestaat ook een relatie met diverse vormen van het verbreken van de symmetrie zoals die bestudeerd wordt in de deeltjesfysica en in de statistische mechanica.

We kunnen deze bifurcatie bestuderen door de trillingstijd van kleine trillingen om de evenwichts-positie te meten.

8. Teken een grafiek van de trillingstijd T als functie van x. Wat voor een soort functie is dit? Is hij stijgend, dalend of is het een complexere functie [2]. [2,5 punten]

[2] Het is mogelijk om twee evenwichtspunten waar te nemen, waarbij de ene stabieler is dan de andere (zie figuur 5). Onderzoek alleen het meest stabiele evenwichtspunt.